UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Dipartimento di Filosofia

Dispensa ad uso del corso di Istituzioni di Logica

Introduzione alla Logica Elementare

Osservazione. Questi appunti sono destinati ad un uso didattico in corsi di base per studenti delle lauree triennali della Facoltà di Lettere e Filosofia. Rappresentano una versione rivista e semplificata di una precedente dispensa in formato elettronico *Corso Propedeutico di Logica* (a cura di M. Franchella, S. Ghilardi, L. Sacchetti).

Questa dispensa è da intendersi come uno spazio *'open source'*: chiunque è libero di proporre modifiche che, opportunamente filtrate dai docenti, potranno concorrere al miglioramento delle successive versioni. La presente versione porta la data del **12 settembre 2008**.

Indice

1 Motivazioni

Mille sono i volti della logica, che essa ha assunto nel corso della storia e che ancora oggi assume. Logica è studio del ragionamento corretto, è analisi delle leggi del pensiero, è dinamica dello spirito che muove la storia, è filo conduttore di una serie di idee, atteggiamenti o comportamenti. Logica è mille cose, a riprova del fascino che questa parola non cessa di esercitare lungo i secoli. Fascino, che nasce dalla provocatorietà originaria che sta dentro ogni possibile suo significato. Logica, infatti, è sempre richiamo a scendere in profondità, a non fermarsi alla superficie delle parole e delle cose, a non lasciarsi intimidire dalle emozioni e dai preconcetti o pregiudizi che i significati portano con sè, a chiedere ragione di qualunque affermazione, a ignorare sedicenti autorità. La logica non conosce confini: si applica o, meglio, si interessa a tutto. Logica è recupero dell'emozione, perchè è passione, sì, passione per il pensiero, nelle sue varie espressioni: lo accompagna ovunque, sempre, di diritto, qualsiasi interpretazione le si attribuisca. Lo accompagna nella dimostrazione matematica, nell'evoluzione concettuale dialettica, nella ricerca di un senso nella storia, nell'esplorazione delle grandi categorizzazioni della realtà. La logica non è patrimonio degli intellettuali. Ha fatto logica Aristotele modellando le forme dei sillogismi, ma fa logica altrettanto bene chi si sente il cuore spezzato di fronte alle incoerenze della propria vita o della politica. La logica è presente ovunque in ciò che è umano. In un corso propedeutico di logica è impossibile affrontare tutte le accezioni che essa ha avuto nella cultura occidentale e, quindi, si devono compiere delle scelte, che tengano conto delle possibilità che gli studenti e le studentesse avranno di incontrarle negli anni successivi della loro formazione universitaria. Poichè, ad esempio, la dialettica hegeliana e la fenomenologia husserliana sono ambiti che gli studenti e le studentesse della Facoltà di Lettere e Filosofia hanno certamente occasione di trovare nei corsi a loro offerti, ci limiteremo qui a quel volto della logica che va sotto il nome di studio degli schemi di ragionamento. E lo faremo, insieme, cercando di mettere da parte tutti i pregiudizi di aridità, freddezza, o quant'altro gravino sul nome logica. Se logica è schema, se è forma, cerchiamo di guardarla come faremmo con una statua stupenda o con un quadro mozzafiato; se logica è ragionamento, cerchiamo di impadronircene come faremmo con un machete di fronte a una rete che ci ostacolasse il passaggio verso un territorio di meraviglie inesplorate o che ci inchiodasse ad un muro di solitudine. La logica come studio degli schemi di ragionamento è uno strumento bellissimo. Andiamo a conoscerla, senza dimenticare che esistono altre accezioni di logica, verso le quali dobbiamo mantenere aperto il nostro interesse, perchè solo un mondo senza barriere al pensiero ci permette di esplorare e gustare l'essere umano nella sua pienezza.

2 Linguaggi Proposizionali

Con il termine **enunciato** intendiamo una qualsiasi proposizione per la quale sia sensato chiedersi se sia vera o falsa. Ad esempio, sono enunciati proposizioni come "La bandiera della pace sventola", "Hans Küng ha compiuto ottant'anni", "Piove e c'è vento", "Se c'è il sole, allora vado al mare". Non sono enunciati invece proposizioni come "C'è il sole, vero?", "Paolo, torna a casa presto!", il cui contenuto non consiste in una mera affermazione.

Informalmente, diciamo poi che un enunciato è un **enunciato semplice** o **enunciato atomico** se non contiene nessun altro enunciato come sua parte propria. Diciamo invece che un enunciato è un **enunciato composto** se contiene altri enunciati, cioè se è possibile scomporlo in enunciati più semplici.

Ad esempio, sono enunciati atomici le proposizioni "La bandiera della pace sventola" e "Hans Küng ha compiuto ottant'anni"; sono invece enunciati composti gli enunciati "Piove e c'è vento", "Se c'è il sole vado al mare" e "Carla Bruni ha gli occhi neri o Carla Bruni ha i capelli neri" (per vedere che "Piove e c'è vento" è composto è sufficiente osservare che "Piove e c'è vento" contiene come sue parti proprie i due enunciati "Piove" e "C'è vento".)

Le parole "e", "o", "se...allora", "non", "ma" si dicono **connettivi**. I connettivi permettono quindi di ottenere enunciati da altri enunciati, cioè permettono di ottenere enunciati composti mediante enunciati più semplici.

Consideriamo l'enunciato composto "Piove e c'è vento". Se associamo all'enunciato atomico "piove" la lettera p, all'enunciato atomico "c'è vento" la lettera q e indichiamo con il carattere $\wedge$ il connettivo "e", possiamo associare all'enunciato "Piove e c'è vento" una espressione formale del tipo $p \wedge q$. L'espressione $p \wedge q$ è un esempio di *formula*. In generale, le formule saranno particolari espressioni ottenute da un dato insieme di simboli, chiamati lettere proposizionali, mediante un'opportuna applicazione dei connettivi. Le formule costituiscono la rappresentazione (certamente semplificata ed impoverita) in un linguaggio artificiale del contenuto concettuale degli enunciati del linguaggio naturale. Definiamo ora in maniera precisa il concetto di formula.

Un **linguaggio proposizionale** $\mathcal{L}$ è semplicemente un insieme, i cui elementi si dicono **lettere proposizionali** e vengono indicati con i caratteri $p, q, r, \ldots$ eventualmente muniti di indici o apici. Su $\mathcal{L}$ non facciamo restrizioni di sorta, anche se spesso nei testi si assume che $\mathcal{L}$ sia numerabile.

Utilizzando gli elementi di $\mathcal{L}$, le parentesi $(,)$ e i caratteri relativi ai connettivi proposizionali $\wedge$ (e), $\vee$ (o), $\rightarrow$ (se...allora), $\neg$ (non), siamo in grado di scrivere tutte le possibili stringhe di simboli come ad esempio

$$(*) \qquad p \vee \neg qqq, \quad \neg\neg)p\wedge, \quad (\neg(p \vee q)),\ \ldots$$

Non tutte queste stringhe di simboli si considerano accettabili da un punto di vista grammaticale, ossia non tutte verranno considerate $\mathcal{L}$-formule. Sono $\mathcal{L}$- formule o, più brevemente, **formule** solo quelle stringhe di simboli che sono ottenute applicando un numero finito di volte le seguenti regole di formazione:

(i) ogni $p \in \mathcal{L}$ è una formula (detta **formula atomica**);

(ii) se A_1 e A_2 sono formule, tali sono $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \vee A_2)$, $(A_1 \rightarrow A_2)$, $(\neg A_1)$.

Le formule vengono indicate con le lettere $A, B, \ldots$ (dette *metavariabili*) a loro volta munite di indici o apici. L'insieme di tutte le formule viene indicato con $F_{\mathcal{L}}$.

Stipuliamo le seguenti convenzioni di notazione.

- L'introduzione di molte parentesi nella definizione di formula serve per avere *unicità di lettura*, ossia per poter ricostruire in modo univoco il procedimento di costruzione delle formule stesse; per non appesantire la trattazione non ci addentriamo in ulteriori dettagli, ci basta segnalare che solo l'unicità di lettura dà modo di procedere in modo non ambiguo in molte circostanze. In particolare, l'unicità di lettura consente, data una formula non atomica, di stabilire univocamente qual è il suo **connettivo principale**, ossia qual è l'ultimo connettivo introdotto nella costruzione della formula stessa. Ad esempio, il connettivo principale di $((p \wedge q) \rightarrow (q \vee p))$ è $\rightarrow$.

- Per alleggerire la scrittura, l'uso delle parentesi non verrà rispettato alla lettera come sarebbe previsto nella definizione di formula. Stipuliamo, infatti, che:

    1) le parentesi esterne sono di regola omesse;

2) $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ sta per $(p_1 \wedge (p_2 \wedge (\cdots (p_{n-1} \wedge p_n) \cdots)))$;[1]

3) $\neg$ lega più strettamente di $\wedge, \vee$, che a loro volta legano più strettamente di $\rightarrow$.

La convenzione del punto 3) significa che, in caso di ambiguità, dovremo (dall'esterno) leggere per prima $\rightarrow$, poi $\wedge, \vee$ ed infine le negazioni. Ad esempio, per leggere correttamente $\neg p \wedge s \rightarrow q \vee r$ secondo le convenzioni sopra stabilite, dobbiamo per prima cosa isolare l'implicazione mettendo la coppia di parentesi $(\neg p \wedge s) \rightarrow (q \vee r)$ e poi, attraverso una seconda coppia di parentesi, dobbiamo evidenziare il fatto che $\wedge$ è più esterna (perchè lega di meno) della negazione, ottenendo $((\neg p) \wedge s) \rightarrow (q \vee r)$.[2] Osserviamo che queste convenzioni non sono sufficienti a disambiguare tutte le situazioni. Per esempio, la scrittura $p \wedge q \vee r$ è ambigua e dovremo sempre mettere le parentesi per leggerla come $(p \wedge q) \vee r$ o come $p \wedge (q \vee r)$.

- $A \leftrightarrow B$ sta per $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$: il connettivo $\leftrightarrow$ si chiama 'bi-implicazione' o 'equivalenza materiale'. Si potrebbero in realtà eliminare altri connettivi dalla lista dei connettivi primitivi e introdurli come abbreviazioni, la scelta che abbiamo fatto non è minimale in questo senso.

3 Funzioni di Verità

Una formula denota un'asserzione che, in una data situazione specifica, risulta essere vera o falsa (ma non contemporaneamente vera e falsa). In effetti, una volta noto il valore di verità dei suoi costituenti, si può determinare meccanicamente in modo agevole il valore di verità di tutta una formula: questo perchè i nostri connettivi saranno analizzati in un'ottica **vero-funzionale**, ossia come funzioni che hanno sia in ingresso che in uscita dei valori di verità. Definire il significato di un connettivo significherà quindi semplicemente specificare sotto quali condizioni è vero o falso un enunciato che contiene il connettivo in esame come connettivo principale.

La semantica che proponiamo è **bivalente**, cioè i valori di verità sono due, il vero e il

[1] La stessa convenzione vale per $\vee$, ma nessuna convenzione di tal tipo vale per $\rightarrow$, per cui scritture come $p \rightarrow q \rightarrow r$ non vengono ammesse.

[2] Per rispettare alla lettera la definizione di formula, ci mancano ancora le parentesi esterne; mettendo anche queste ultime, si arriva a $(((\neg p) \wedge s) \rightarrow (q \vee r))$.

falso, li indichiamo con T, F ('True', 'False') o con $1, 0$. Analizziamo ora il significato dei nostri connettivi.

• L'enunciato "Piove e c'è vento" è vero se e solo se sono veri entrambi gli enunciati componenti "Piove" e "c'è vento". Ricordiamo che il connettivo "e" si chiama **congiunzione** e si indica con il simbolo $\wedge$. Dunque se indichiamo con p l'enunciato "Piove" e con q l'enunciato "c'è vento", possiamo formalizzare l'ununciato "Piove e c'è vento" mediante la formula $p \wedge q$. Per quanto detto la formula $p \wedge q$ è vera se e solo se sia p che q sono vere.

In generale, se A e B indicano enunciati qualsiasi, la formula $A \wedge B$ è vera se e solo se sia A che B sono vere. Possiamo riassumere quanto detto mediante la seguente tabella, detta **tavola di verità per il connettivo** $\wedge$:

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

• L'enunciato "Carla Bruni ha gli occhi neri o Carla Bruni Bruni ha i capelli neri" invece è vero quando almeno uno degli enunciati "Carla Bruni Bruni ha gli occhi neri " e "Carla Bruni ha i capelli neri" è vero. Ricordiamo che il connettivo "o" si chiama **disgiunzione** e si indica con il simbolo $\vee$. Nel linguaggio naturale esistono almeno due usi diversi della disgiunzione, quello inclusivo (corrispondente al latino 'vel') e quello esclusivo (corrispondente al latino 'aut'). I due usi differiscono per la valutazione del caso in cui entrambi i disgiunti siano veri: nell'uso inclusivo la disgiunzione corrispondente viene considerata vera, nell'uso esclusivo viene considerata falsa. Scegliamo l'uso inclusivo della disgiunzione che prevale nella letteratura (tale scelta non pregiudica comunque l'espressività del linguaggio in quanto la disgiunzione esclusiva risulta ottenibile dalla combinazione $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$).

In generale, se A e B indicano formule qualsiasi, la formula $A \vee B$ è vera se e solo se o A o B è vera. Possiamo riassumere quanto detto mediante la **tavola di verità per** $\vee$:

A	B	$A \vee B$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

• L'enunciato "Non piove" è vero quando è falso l'enunciato "piove". Ricordiamo che il connettivo "non" si chiama **negazione** e si indica con il simbolo $\neg$.

In generale, se A indica una formula qualsiasi, la formula $\neg A$ è vera se e solo se A è falsa. La **tavola di verità per** $\neg$ è quindi:

A	$\neg A$
T	F
F	T

Questo uso della negazione viene dalla tradizione aristotelica e caratterizza la logica classica (che forma l'oggetto delle presenti note). Segnaliamo che nel corso della storia ed in particolare nel XX secolo sono state proposte differenti ed interessanti analisi della negazione, sia da un punto di vista sintattico che semantico.

• Passiamo infine al connettivo "se ... allora". Questo connettivo si chiama **implicazione** o **condizionale** e si indica con $\to$. Consideriamo l'enunciato "Se a è un numero pari, allora $a+1$ è un numero dispari". Certamente non vogliamo considerare come controesempi a tale asserzione casi di numeri a che non siano pari. D'altra parte, gli unici controesempi possibili sarebbero quelli dati da numeri a che fossero pari e per cui $a+1$ non fosse dispari. Siccome non è possibile trovare un tale numero, siamo portati a concludere che l'enunciato in questione è vero. Risulta quindi immediato stipulare che, se A e B indicano enunciati qualsiasi, la formula $A \to B$ è falsa solamente quando A è vera e B è falsa. Possiamo riassumere quanto detto mediante la **tavola di verità per** $\to$:

A	B	$A \to B$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

Certamente questo è un uso dell'implicazione che è giustificato in alcuni ambiti matematici (come quello sopra illustrato), ma che tuttavia è ben lungi dal render conto della ricchezza dell'implicazione nel linguaggio naturale, dove sono presenti molteplici significati ad esempio di natura causale o controfattuale. Per l'analisi di tali significati occorrono strumenti logici più complessi, che esulano dal presente corso introduttivo.

Nella formula $A \to B$, la sottoformula A si dice *antecedente* o *premessa* dell'implicazione, mentre la sottoformula B si dice *conseguente* o *conclusione* dell'implicazione.

Possiamo riassumere in maniera sintetica quanto detto sopra come segue. Sia

$$\mathbf{2} := \{1, 0\}$$

l'insieme dei valori di verità. Chiamiamo interpretazione (o **assegnamento**) una qualunque funzione

$$V : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{2}.$$

V si estende a $F_{\mathcal{L}}$ per induzione, utilizzando le tavole di verità sopra descritte. L'induzione è sul numero di connettivi della formula di cui si vuole calcolare il valore di verità sotto l'assegnamento V; formalmente, si pone:

- $V(A \wedge B) := min(V(A), V(B))$;
- $V(A \vee B) := max(V(A), V(B))$;
- $V(\neg A) := 1 - V(A)$;
- $V(A \to B) := max(1 - V(A), V(B))$.

Per effetto delle definizioni date, è facile vedere che $V(A \leftrightarrow B) = 1$ se e solo se $V(A) = V(B)$.

Una formula A è una **verità logica** (o **tautologia**) qualora si abbia $V(A) = 1$ *per ogni* possibile V. Dunque una tautologia è una proposizione che è sempre vera (cioè tale che il suo valore di verità è sempre T). A è una **contraddizione** (o è **refutabile**) qualora valga $V(A) = 0$ per ogni V. Dunque una contraddizione è una formula che risulta sempre falsa. Infine A è **soddisfacibile** se e solo se[3] $V(A) = 1$ *per almeno un* V.

[3] D'ora in poi abbreviamo 'se e solo se' con 'sse'.

Per valutare se una data formula A sia o meno una tautologia, una contraddizione, ecc. si può fare una tabella (detta tavola di verità) che calcoli $V(A)$ per tutti i possibili V. Ovviamente, è irrilevante il valore di V sulle lettere proposizionali che non compaiono in A, perciò se A contiene n lettere proposizionali saranno prese in considerazione solo 2^n interpretazioni possibili. Questo metodo è oneroso, non sono noti (e probabilmente non esistono neppure) metodi veloci che operino nella totalità dei casi; spesso però nella pratica è inutile far passare tutte le interpretazioni possibili e ci sono vari algoritmi meno brutali dell'esame di tutta la tavola (ne analizzeremo uno nel prossimo capitolo).

Facciamo un esempio di esame completo della tavola di verità di una formula; consideriamo l'enunciato

"Se piove o c'è vento allora Marco non esce di casa".

Gli enunciati atomici componenti di tale enunciato sono "Piove", "C'è vento" e "Marco esce di casa". Indichiamo con p l'enunciato atomico "Piove", con q l'enunciato atomico "C'è vento", con r l'enunciato atomico "Marco esce di casa". Possiamo quindi formalizzare l'enunciato "Se piove o c'è vento allora Marco non esce di casa" mediante la formula[4]

$$p \vee q \to \neg r.$$

Costruiamo la tavola di verità di questa formula applicando successivamente le tavole di verità dei connettivi:

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \to \neg r$
T	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

Osserviamo che ad ogni assegnamento di verità T o F alle lettere proposizionali corrisponde un valore di verità della formula nel suo complesso, e questo valore di verità si ottiene

[4]Mettendo tutte le parentesi del caso (salvo quelle esterne), la formula si scrive con $(p \vee q) \to (\neg r)$.

applicando via via le tavole di verità per i connettivi a tutte le sottoformule. Inoltre, come già osservato, se in una formula vi sono n lettere proposizionali diverse allora si hanno 2^n possibili assegnamenti di verità a tali lettere proposizionali e quindi 2^n righe nella tavola di verità. In questo modo vengono presi in esame tutti i casi possibili. Quindi, ad esempio, se compaiono 3 lettere proposizionali (come in $p \vee q \rightarrow \neg r$) vi saranno 8 righe nella tavola di verità, se compaiono 2 lettere proposizionali (come in $p \vee q$) vi saranno 4 righe nella tavola di verità, e via dicendo.

Dallo studio della tavola di verità per $p \vee q \rightarrow \neg r$ otteniamo che la formula $p \vee q \rightarrow \neg r$ è soddisfacibile (in quanto esiste un assegnamento che la rende vera), dunque, in particolare, $p \vee q \rightarrow \neg r$ non è una contraddizione. Siccome però esiste un assegnamento che rende falsa $p \vee q \rightarrow \neg r$, si ha che $p \vee q \rightarrow \neg r$ non è una tautologia.

Invece, si può verificare che $p \wedge q \rightarrow q$ e $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ sono tautologie, mentre formule come $p \wedge \neg p$ e $p \wedge \neg(p \vee q)$ sono contraddizioni.

4 Linguaggi elementari

Proviamo ora ad entrare nello lo studio della correttezza delle inferenze (ossia degli 'schemi di ragionamento'), considerando, ad esempio, l'inferenza

Se la lezione è noiosa, esco dall'aula.
Non esco dall'aula.
Quindi la lezione non è noiosa.

Questa inferenza è corretta. Per provarlo, associamo all'enunciato 'è noiosa' la lettera proposizionale p, all'enunciato 'esco dall'aula' la lettera proposizionale q, sicchè l'inferenza viene schematizzata con

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Per rilevare la correttezza di tale inferenza, basta ora osservare che la formula

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p \tag{1}$$

è una tautologia. La formula (1) è stata ottenuta considerando l'implicazione che ha come antecedente la congiunzione delle premesse dell'inferenza da testare e come conseguente la sua conclusione.

Tuttavia vi sono inferenze intuitivamente corrette che non possono essere studiate e giustificate mediante il calcolo proposizionale. Consideriamo ad esempio la seguente inferenza:

$$\begin{array}{l} \text{Tutti gli uomini sono mortali.} \\ \text{Socrate è un uomo.} \\ \hline \text{Quindi Socrate è mortale.} \end{array}$$

È facile vedere che questa inferenza, pur essendo intuitivamente corretta, non è giustificabile mediante il calcolo proposizionale. Infatti riscrivendo l'inferenza mediante il simbolismo della logica proposizionale otteniamo

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè questa inferenza sia corretta è che la formula

$$p \wedge q \to r$$

sia una tautologia. Tuttavia è facile osservare che l'assegnamento V tale che $V(p) = V(q) = 1$ e $V(r) = 0$ la falsifica. Dunque l'inferenza data, intuitivamente corretta, risulta formalmente scorretta se utilizziamo come strumento di indagine il calcolo proposizionale.

In effetti la correttezza delle inferenze non si basa solamente sulle relazioni vero funzionali tra le proposizioni di cui sono composte (cosa che invece succede nelle inferenze giustificabili mediante il solo calcolo proposizionale), ma può basarsi anche sulla struttura interna di queste proposizioni e sul significato di espressioni quali, ad esempio, "ogni", "tutti", ecc. In altre parole, per poter trattare inferenze come l'ultima che abbiamo visto è necessario considerare più a fondo la struttura interna delle proposizioni.

Occorre quindi introdurre un linguaggio più ricco e con maggiore capacità espressiva del calcolo proposizionale. Più precisamente, dovremo utilizzare un nuovo formalismo e introdurre poi delle regole che permettano di trattare formule contenenti i nuovi simboli introdotti.

Vediamo brevemente e in modo molto informale da che cosa è costituito un linguaggio del primo ordine.

Innanzitutto ampliamo l'insieme degli operatori logici. Ai connettivi $\wedge, \vee \to, \neg$ aggiungiamo due nuovi operatori $\forall$ e $\exists$. Questi due nuovi operatori sono di natura sensibilmente differente dai connettivi proposizionali, si dicono *quantificatori*. Il simbolo $\forall$ si chiama *quantificatore universale* e il suo significato intuitivo è “per ogni”, Il simbolo $\exists$ si chiama *quantificatore esistenziale* e il suo significato intuitivo è “esiste”.

Avremo poi, in particolare, due classi distinte di enti linguistici: le “costanti” e i “predicati”. Le costanti rappresenteranno elementi del dominio del discorso (numeri, persone, oggetti, ecc.) mentre i “predicati” rappresenteranno proprietà di questi oggetti o relazioni che possono intercorrere tra questi oggetti (esempi di predicati sono: “essere un uomo”, “essere minore di”, ecc.). In altre parole, i predicati ci consentono di esprimere proprietà e relazioni su insiemi di oggetti.

Dunque, se, ad esempio, $P(x)$ indica che x gode di una data proprietà P, allora l'espressione $\forall x P(x)$ significherà “per ogni x vale la proprietà P” o, equivalentemente, “la proprietà P vale per ogni x”, mentre l'espressione $\exists x P(x)$ significherà “esiste un x che gode della proprietà P”.
Come esempio riconsideriamo l'inferenza

$$\begin{array}{l} \text{Tutti gli uomini sono mortali.} \\ \text{Socrate è un uomo.} \\ \hline \text{Quindi Socrate è mortale.} \end{array}$$

Supponiamo che

- U stia per il predicato “essere uomo”

- M stia per il predicato “essere mortale”

- la costante a stia per “Socrate”

Possiamo quindi formalizzare la nostra inferenza con

$$\begin{array}{l} \forall x(U(x) \to M(x)) \\ U(a) \\ \hline M(a) \end{array}$$

Come secondo esempio consideriamo l'inferenza

$$\begin{array}{l} \text{Tutti gli uomini sono mortali.} \\ \text{Tutti gli uomini sono animali.} \\ \hline \text{Quindi qualche animale è mortale.} \end{array}$$

Supponiamo che

- U stia per il predicato "essere uomo"

- M stia per il predicato "essere mortale"

- A stia per il predicato "essere animale".

Possiamo quindi formalizzare la nostra inferenza con

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(U(x) \to M(x)) \\ \forall x(U(x) \to A(x))\end{array}}{\exists x(A(x) \wedge M(x)}$$

Abbiamo in questo modo formalizzato l'inferenza in maniera tale che sarà poi possibile, mediante opportune tecniche, analizzarla e studiarne la correttezza.

Più in generale, nel linguaggio del primo ordine avremo i seguenti simboli: i connettivi proposizionali e i due quantificatori, le *variabili individuali* $x_0, x_1 \ldots$, le *costanti individuali* $a_1, a_2, \ldots$, le *lettere predicative* $P, Q \ldots$ e le *lettere funzionali* $f, g \ldots$ (consideremo le costanti individuali come simboli di funzione 0-arie).

Nel nostro primo esempio abbiamo utilizzato una sola costante a, una sola variabile individuale x, due predicati unari U e M, e nessuna lettera funzionale.

4.1 Linguaggi elementari, Termini e Formule

Dunque un linguaggio del primo ordine (che chiameremo anche 'linguaggio elementare') è più ricco di un linguaggio proposizionale e consente di nominare individui, di costruire designazioni di individui a partire da altre, di parlare di proprietà di individui, di quantificare su di essi, ecc. Diamo ora la relativa definizione formale:

Definizione 1. *Un* **linguaggio elementare** $\mathcal{L}$ *è una quadrupla*

$$\langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \alpha, \beta \rangle,$$

dove

- $\mathcal{P}$ *è un insieme (l'insieme dei simboli di predicato* $P, Q, R, \ldots$ *) e* α *è una funzione che assegna a ogni simbolo di predicato il numero di oggetti a cui si riferisce, cioè assegna* *al simbolo di predicato la sua arietà. In simboli, questa funzione α è scritta con $\alpha : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{N}$, dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali (se $\alpha(R) = n$ diciamo che R è un* simbolo di predicato di arietà *n);*

- *$\mathcal{F}$ è un insieme (l' insieme dei simboli di funzione) e β è una funzione che associa ad ogni simbolo di funzione il numero degli argomenti a cui si applica, cioè la sua arietà. In simboli, si scrive $\beta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}$ dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali (se $\beta(f) = n$ diciamo che f è un* simbolo di funzione di arietà *n).*[5]

I simboli di predicato di arietà 0 sono le vecchie lettere proposizionali: essi possono essere utilizzati per formalizzare frasi costituite da soli verbi impersonali (come 'Piove', 'Nevica'). I simboli di predicato di arietà 1 rappresentano proprietà di individui: essi possono essere utilizzati per modellizzare nomi comuni, aggettivi qualificativi, nonchè verbi intransitivi (con questo intendiamo dire che 'uomo' rappresenta la proprietà di essere uomo, 'bello' la proprietà di essere bello, 'dormire' la proprietà di essere addormentato, ecc). I simboli di predicato di arietà 2 rappresentano relazioni fra coppie di individui: essi possono essere utilizzati per modellizzare verbi transitivi (ad esempio, 'amare' rappresenta l'insieme delle coppie di esseri umani il cui primo componente è innamorato del secondo). I simboli di predicato di arietà 3 rappresentano relazioni fra terne di individui: essi possono essere utilizzati per modellizzare verbi dativi come 'dare', 'regalare', ecc.[6]

I simboli di funzione di arietà zero sono detti costanti individuali e possono essere utilizzati per modellizzare i nomi propri, nonchè costanti matematiche (come $0, 1, \pi, e, \dots$). I simboli di funzione di arietà 2 rappresentano operazioni binarie (come ad esempio le operazioni aritmetiche di somma e prodotto); naturalmente i simboli di funzione di arietà 1 rappresentano operazioni unarie (come il seno, l'esponenziale in una base fissata, il logaritmo, ecc.). Simboli di funzione di arietà 1 sono presenti anche nel linguaggio naturale, dove possono essere utilizzati per rappresentare le funzioni espresse da certe locuzioni come 'il padre di$\cdots$', 'il professore di$\cdots$'.

Simboli di funzione e di predicato di arietà elevata (maggiore di 3, per intenderci) sono raramente usati, ma li abbiamo inclusi nella definizione di linguaggio elementare per omogeneità di trattazione.

[5]Attenzione: β non appartiene a $\mathcal{F}$, cioè NON è un simbolo di funzione del linguaggio, ma assegna la rispettiva arietà a tutti i simboli di funzione del linguaggio.

[6]Per un'analisi meno schematica e più approfondita di queste classificazioni occorre consultare un testo sulla semantica dei linguaggi naturali.

In aggiunta ai simboli di predicato e di funzione, per costruire le formule avremo a disposizione dei simboli universali (cioè comuni ad ogni linguaggio elementare), che sono, oltre ai simboli ausiliari (parentesi e virgole):

- l'insieme $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, y_0, y_1, y_2, \ldots\}$ detto insieme delle **variabili individuali**;
- i **connettivi proposizionali** $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ che abbiamo incontrato nella parte del corso relativa alla logica proposizionale;
- i **quantificatori** $\forall$ (per ogni) ed $\exists$ (esiste).

Se $\mathcal{P}$ contiene il predicato $''={}''$ di arietà 2, diciamo che $\mathcal{L}$ è un linguaggio con identità.

Le variabili individuali rappresentano individui indeterminati, la cui designazione può ad esempio essere fissata dal contesto (in tal senso, si può costruire un parallelo fra le variabili dei linguaggi formali e i pronomi dei linguaggi naturali).

Per riferirci ad individui, abbiamo ora a disposizione costanti e variabili: se applichiamo a queste ultime i simboli di funzione, possiamo costruire modi più complessi di nominare oggetti. In tal modo si costruiscono espressione matematiche come $\pi + log\,(x + y)$, ma anche locuzioni del linguaggio naturale come 'padre di Carlo', 'padre del padre di Carlo' (ossia 'nonno paterno di Carlo'), ecc. Tutto questo è riassunto nella definizione formale di termine:

Definizione 2. *Data una linguaggio elementare $\mathcal{L}$, l'insieme degli $\mathcal{L}$-termini (o più semplicemente* **termini***) è cosí definito:*

- *ogni $c \in \mathcal{F}$ con $\beta(c) = 0$ è un termine;*
- *ogni $x \in \mathcal{V}$ è un termine;*
- *se $f \in \mathcal{F}$, se $\beta(f) = n$ (per $n \geq 1$) e se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.*[7]

Abbiamo visto che i termini aumentano le possibilità di un linguaggio elementare di riferirsi ad individui (possibilità inizialmente ristretta a costanti e variabili). In modo simile, la nozione di formula offre la possibilità di costruire relazioni e affermazioni complesse:

[7]Si osservi che, nel caso dei simboli di funzione binaria, questa definizione obbliga ad adottare una notazione prefissa (cioè obbliga a scrivere ad esempio $+(x, y)$ anzichè $x + y$). Tuttavia, noi ci sentiremo liberi di usare notazioni infisse nei casi in cui lo riterremo opportuno.

Definizione 3. *Data una linguaggio elementare $\mathcal{L}$, l'insieme delle $\mathcal{L}$-formule (o più semplicemente* **formule***) è cosí definito:*

- *se $R \in \mathcal{P}$, se $\alpha(R) = n$ e se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, $(R(t_1, \ldots, t_n))$ è una formula;*[8]

- *se A_1, A_2 sono formule, tali sono anche $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \vee A_2)$, $(A_1 \rightarrow A_2)$, $(\neg A_1)$;*

- *se A è una formula e $x \in \mathcal{V}$, allora $(\forall x A)$ e $(\exists x A)$ sono formule.*

La scelta di un opportuno linguaggio dipende da ciò di cui vogliamo parlare e da ciò che intendiamo realmente esprimere. Ad esempio, se vogliamo parlare di numeri (naturali, interi, razionali o reali) un opportuno linguaggio $\mathcal{L}_1$ potrebbe contenere: a) due costanti $0, 1$; b) due simboli di operazioni binarie, cioè la somma $+$ e il prodotto $\cdot$; c) due relazioni binarie, cioè l'identità $=$ e la relazione di minore $<$. Se invece vogliamo parlare di relazioni di parentela, una scelta ragionevole potrebbe essere il linguaggio $\mathcal{L}_2$ comprendente: a) due simboli di funzione unarie, cioè $p =$'il padre di' e $m =$'la madre di'; b) un predicato binario, l'identità.

Come sappiamo, i termini servono a costruire designazioni di individui complesse, partendo dalle designazioni di base specificate da costanti e variabili. Nel caso di $\mathcal{L}_2$, i termini

$$p(p(x)), \qquad p(m(x))$$

servono a specificare il nonno paterno e il nonno materno dell'individuo x. Analogamente, le formule costruiscono proprietà e relazioni complesse. Nel caso di $\mathcal{L}_2$, la formula

$$(p(x) = p(y)) \wedge (m(x) = m(y))$$

dice che x e y sono fratelli/sorelle. La formula

$$(p(p(x)) = p(p(y))) \vee (p(p(x)) = p(m(y))) \vee (p(m(x)) = p(p(y))) \vee (p(m(x)) = p(m(y)))$$

è un modo per esprimere che x e y sono cugini (tramite la comunanza di uno dei nonni maschi).

Convenzioni notazionali:

[8] Formule di questo tipo, cioè formule ottenute applicando un simbolo di predicato a termini, si dicono formule *atomiche*. Le formule atomiche non contengono quindi altre formule come parti proprie.

- Valgono le solite convenzioni per eliminare le parentesi, ossia le parentesi più esterne vengono di regola omesse. In più stipuliamo anche che $\neg, \forall, \exists$ legano più strettamente di $\wedge, \vee$, che a loro volta legano più strettamente di $\rightarrow$.[9]

- Un termine è **chiuso** (o '*ground*') se è costruito senza usare variabili.

- Una occorrenza di una variabile x in una formula A è detta **vincolata** qualora si trovi all'interno di una sottoformula[10] del tipo $\forall xB$ o $\exists xB$, altrimenti è detta **libera**. Ad esempio, nelle formula
$$\forall x(R(x, y)) \vee P(x)$$
la x ha due occorrenze, la prima delle quali è vincolata (perchè è all'interno della sottoformula $\forall x(R(x, y)))$, mentre la seconda è libera; la y ha una sola occorrenza, che è libera.

- Una variabile x occorre libera in A se e solo se qualche sua occorrenza in A è libera.

- Un **enunciato** ('sentence', in inglese) o formula chiusa è una formula in cui nessuna variabile occorre libera.

- Con notazioni del tipo $A(t/x)$ (o, più semplicemente $A(t)$) indicheremo il risultato dell'operazione di sostituzione del termine t al posto di tutte le occorrenze libere della variabile x in A.

5 La Semantica di Tarski

Diamo ora la semantica per i linguaggi elementari. Il problema della semantica è presto detto: simboli di funzione, simboli di predicato, termini e formule di per sè non sono altro che caratteri e stringhe di caratteri e in quanto tali non hanno nessun significato intrinseco. È ben vero che nel definire termini e formule abbiamo tenuto presente che i termini devono rappresentare individui e che le formule devono rappresentare relazioni complesse o affermazioni, tuttavia queste motivazioni intuitive non sono sufficienti ad attribuire loro un significato pieno. In altri termini, il fatto che il dizionario riporti la parola 'cane' come parola dotata di significato, non significa ancora che tale significato sia noto o compreso,

[9] Così, ad esempio, $\forall xP(x) \rightarrow \exists zP(z) \vee \exists yQ(y)$ sta per $(\forall x(P(x))) \rightarrow ((\exists z(P(z))) \vee (\exists y(Q(y))))$.

[10] La nozione di sottoformula è quella ovvia (volendo essere precisi, si potrebbe definirla induttivamente).

non prima almeno di aver letto cosa la parola ‘cane’ significhi o di averlo imparato per altra via da piccoli.

La semantica dei linguaggi elementari è stata rigorosamente fissata dal logico polacco Tarski negli anni 30; tuttavia la definizione tarskiana non fa che riprendere la millenaria tradizione filosofica della definizione di verità come corrispondenza con lo stato di fatto. All’interno di un corso di logica, la definizione tarskiana di verità rappresenta un passaggio imprescindibile, perchè è solo su di essa che si possono fondare tutti i procedimenti algoritmici che vengono poi introdotti. Ciononostante, l’impatto con la semantica formalizzata può risultare difficile di primo acchito per un semplice motivo: i significati delle parole e delle locuzioni che usiamo nella vita quotidiana (e quindi anche la nozione di verità che su di essi si basa) sono fissati dalle convenzioni linguistiche e sociali, per cui non si sente il bisogno di fare un passo indietro e di riesaminarli da un punto di vista astratto. Tuttavia tale riesame è per noi indispensabile per proseguire; invitiamo lo studente perciò a leggere senza troppe pretese il presente paragrafo in prima battuta e a ritornare (magari più volte) su di esso quando la sua comprensione degli argomenti si sarà affinata.

5.1 La Nozione di Struttura

La prima cosa da tenere presente è che il significato dei simboli dipende da una situazione concreta. Nel caso della logica proposizionale, una situazione concreta è modellata da un assegnamento: l’assegnamento fa sì ad esempio che l’enuciato ‘Piove’ venga a denotare un significato (il vero od il falso) a seconda appunto della situazione che l’assegnamento simula in modo schematico, cioè a seconda che realmente piova o meno. Nella logica predicativa, occorrerà la nozione più complessa di *struttura* invece della nozione di assegnamento: una struttura deve assegnare un insieme di oggetti ad ogni simbolo di predicato unario, una relazione (vista come insieme di coppie di oggetti) ad ogni simbolo di predicato binario, un oggetto ad ogni costante, ecc.[11] In altre parole, la nozione di struttura fotografa e schematizza (mediante strumenti insiemistici) quanto è noto sul significato degli enti linguistici in una data situazione.

Per introdurre formalmente una struttura, si fissa un insieme non vuoto $\mathbf{A}$, detto do-

[11] Per farsi un’idea precisa, può essere utile pensare ai nomi propri di persona, come ‘Pietro’, ‘Paolo’, ecc.: questi ultimi non hanno un significato universale fissato apriori (come possiamo essere erroneamente tentati di credere che succeda per altre entità linguistiche come nomi comuni e verbi), il loro significato è di volta in volta adattato dalla nostra mente alla situazione in cui ci troviamo.

minio della struttura, sul quale assumeranno i valori le variabili individuali; poi si fissa una funzione che associ ad ogni simbolo di funzione n-ario una funzione da $\mathbf{A}^n$ a $\mathbf{A}$ (cioè una operazione a n posti) e ad ogni simbolo di predicato n-ario una relazione n-aria (cioè un sottoinsieme di $\mathbf{A}^n$). Tutto questo è scritto nella seguente definizione:

Definizione 4. *Data una linguaggio elementare $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-***struttura** *$\mathcal{A}$ è una coppia $\langle \mathbf{A}, \mathcal{I} \rangle$ dove $\mathbf{A}$ è un insieme (non vuoto),*[12] *detto* **dominio***, e $\mathcal{I}$ è una funzione, detta* **interpretazione***, che opera come specificato qui di seguito. $\mathcal{I}$ associa*

- *ad ogni $P \in \mathcal{P}$ tale che $\alpha(P) = n$, un sottoinsieme $\mathcal{I}(P)$ di $\mathbf{A}^n$.*

- *ad ogni $f \in \mathcal{F}$ tale che $\beta(f) = n$, una funzione $\mathcal{I}(f) : \mathbf{A}^n \longrightarrow \mathbf{A}$.* $\dashv$

In particolare, se $c \in \mathcal{F}_0$, cioè se c è un simbolo di costante, $\mathcal{I}(c)$ è un elemento di $\mathbf{A}$. Se $\mathcal{L}$ contiene l'identità, stipuliamo che la relativa interpretazione $\mathcal{I}(=)$ sia sempre l'insieme delle coppie identiche, cioè $\{(a, a) \,|\, a \in \mathbf{A}\}$.

5.2 La Nozione di Verità

Fissata un'interpretazione (cioè una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$) per i simboli di un linguaggio $\mathcal{L}$, è possibile dire quali enunciati di $\mathcal{L}$ sono veri (in $\mathcal{A}$) e quali no. Ciò rispecchia una pratica intuitiva: possiamo dire se 'Paolo è simpatico' è vero o no, una volta che ci siamo intesi sul significato delle parole, cioè una volta che abbiamo fissato una $\mathcal{L}$-struttura. Avendo fissato una $\mathcal{L}$-struttura, sappiamo chi è 'Paolo', sappiamo quali sono i nostri criteri di simpatia perchè abbiamo fissato l'insieme delle persone simpatiche, per cui per stabilire il valore di verità della frase 'Paolo è simpatico' si tratta solo di vedere se Paolo appartiene o meno a tale insieme delle persone simpatiche. Più in generale, avremo che una formula del tipo $P(c_1, \ldots, c_n)$ (dove $c_1, \ldots, c_n$ sono costanti) sarà vera nella $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$ sse la n-pla $(\mathcal{I}(c_1), \ldots, \mathcal{I}(c_n))$ (che fissa gli individui denotati da $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathcal{A}$) appartiene a $\mathcal{I}(P)$ (ossia all'insieme delle n-ple che fissa il significato della relazione n-aria P in $\mathcal{A}$).

Per definire il valore di verità di formule non atomiche avremo delle ovvie clausole ricorsive. Tuttavia, nel dare tale definizione, si incontrano alcuni problemi che necessitano l'introduzione di qualche accorgimento tecnico, dovuto al fatto che non tutti gli elementi

[12] Si faccia attenzione al fatto che usiamo la lettera calligrafica $\mathcal{A}$ per indicare una struttura nel suo complesso e la lettera in grassetto $\mathbf{A}$ per indicarne il dominio (invece la lettera stampata maiuscola A, come le lettere $B, C, \ldots$, continueranno ad essere usate come metavariabili per formule).

di $\mathbf{A}$ sono nominabili con termini chiusi di $\mathcal{L}$. Il problema può essere evidenziato nel modo seguente. La relazione $\mathcal{A} \models A$ ('l'enunciato A è vero nella $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$') verrà, come si è detto, definita per induzione sul numero di connettivi e quantificatori di A; avremo ad esempio clausole induttive del tipo

$$\mathcal{A} \models A_1 \wedge A_2 \qquad \text{sse} \qquad (\mathcal{A} \models A_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \models A_2)$$

che dicono che una congiunzione è vera sse lo sono entrambi i congiunti. Tuttavia, nel caso dei quantificatori, tali clausole non possono essere formulate ingenuamente con

$$\mathcal{A} \models \exists x A \qquad \text{sse} \qquad \mathcal{A} \models A(a/x), \text{ per qualche } \; a \in \mathbf{A}$$

perchè $A(a/x)$ non è una $\mathcal{L}$-formula, in quanto a è un elemento del dominio di interpretazione e non un simbolo del linguaggio (per cui la scrittura $A(a/x)$ semplicemente non ha senso). Se tentiamo di risolvere questo problema, ci accorgiamo subito inoltre che non c'è nessuna motivo affinchè il linguaggio $\mathcal{L}$ abbia a disposizione un nome per ogni elemento $a \in \mathbf{A}$.[13] Se avessimo a disposizione un nome $\bar{a}$ per ogni $a \in \mathbf{A}$, la clausola di verità per il quantificatore esistenziale potrebbe essere agevolmente corretta con

$$\mathcal{A} \models \exists x A \qquad \text{sse} \qquad \mathcal{A} \models A(\bar{a}/x), \text{ per qualche } \; a \in \mathbf{A}.$$

Per questo motivo, decidiamo di ampliare preventivamente $\mathcal{L}$ stesso. Se $\mathcal{A}$ è una $\mathcal{L}$-struttura, $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ indica il linguaggio ottenuto aggiungendo a $\mathcal{L}$ una costante $\bar{a}$ per ogni $a \in \mathbf{A}$ ($\bar{a}$ è detta essere il nome di a). Cosí $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ contiene un nome per ogni elemento del dominio di $\mathcal{A}$. Allarghiamo $\mathcal{I}$ a queste nuove costanti ponendo $\mathcal{I}(\bar{a}) = a$ (in futuro, se non c'è pericolo di confusione, ometteremo spesso di distinguere fra elementi di $\mathbf{A}$ e i loro nomi, cioè scriveremo direttamente a invece di $\bar{a}$).

C'è ancora un punto da chiarire. L'interpretazione $\mathcal{I}$ di una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{I} \rangle$ fissa il significato delle costanti (e dei simboli di funzione), ma non fissa direttamente il significato dei termini composti. Ad esempio, la $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$ fissa il significato della costante $c =$'Paolo', fissa il significato delle funzioni unarie $p =$'padre di' e $m =$'madre di'; possiamo da tutto ciò risalire al significato dell'espressione 'nonno materno di Paolo'? Certamente, tale espressione 'nonno materno di Paolo' altri non è che $p(m(c))$ e il suo

[13] Si pensi soltanto al fatto seguente: il linguaggio usualmente è numerabile (cioè le formule e i termini possono di solito essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali), mentre $\mathbf{A}$ può essere un insieme qualunque molto più grande, come quello dei numeri reali.

significato sarà $\mathcal{I}(p)(\mathcal{I}(m)(\mathcal{I}(c)))$ (ossia il valore della funzione che interpreta 'padre di' calcolato sul valore della funzione che interpreta 'madre di' calcolato sull'elemento denotato da 'Paolo').

Formalmente, si procede così: per induzione, *definiamo $\mathcal{I}(t)$ per ogni $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-termine chiuso t*. Se t è una costante (vecchia o nuova) $\mathcal{I}(t)$ è già stato definito. Se t è $f(t_1, \ldots, t_n)$, $\mathcal{I}(t)$ sarà $\mathcal{I}(f)(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n))$ (dove $\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n)$ sono dati per induzione e $\mathcal{I}(f)$ è l'interpretazione del simbolo f specificata dalla $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathcal{I})$).

Siamo ora in grado di dare le definizione di verità di una $\mathcal{L}$-formula in una $\mathcal{L}$-struttura:

Definizione 5. *Data una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$ e dato un $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-enunciato A, la relazione $\mathcal{A} \models A$ (che si legge con 'A è* **vero** *in $\mathcal{A}$), è definita induttivamente sul numero di connettivi e quantificatori di A come segue:*

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n) & \text{sse} & (\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n)) \in \mathcal{I}(P) \\
\mathcal{A} \models A_1 \wedge A_2 & \text{sse} & (\mathcal{A} \models A_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{A} \models A_2) \\
\mathcal{A} \models A_1 \vee A_2 & \text{sse} & (\mathcal{A} \models A_1 \quad \text{oppure} \quad \mathcal{A} \models A_2) \\
\mathcal{A} \models \neg A_1 & \text{sse} & \mathcal{A} \not\models A_1 \\
\mathcal{A} \models A_1 \to A_2 & \text{sse} & (\mathcal{A} \not\models A_1 \quad \text{oppure} \quad \mathcal{A} \models A_2) \\
\mathcal{A} \models \forall x A_1 & \text{sse} & \mathcal{A} \models A_1(\bar{a}/x) \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{A} \\
\mathcal{A} \models \exists x A_1 & \text{sse} & \mathcal{A} \models A_1(\bar{a}/x) \quad \text{per qualche } a \in \mathbf{A}.
\end{array}
$$

Se A è una formula qualunque (non necessariamente un enunciato) $\mathcal{A} \models A$ sta per $\mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n A$ (dove abbiamo assunto che $x_1, \ldots, x_n$ siano tutte e sole le variabili che occorrono libere in A).[14]

[14] Si noti che nel caso in cui $\mathcal{L}$ contenga l'identità abbiamo sempre

$$\mathcal{A} \models t_1 = t_2 \quad \text{sse} \quad \mathcal{I}(t_1) = \mathcal{I}(t_2)$$

per ogni coppia t_1, t_2 di $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-termini chiusi.

Inseriamo qui anche un'osservazione tecnica (al momento assolutamente marginale). Data una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{A}$ e data una $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-formula $A(x)$ (in cui la sola variabile x può occorrere libera), si prova facilmente per induzione (ma si deve fare un'induzione preventiva per stabilire un'analoga proprietà dei termini) che se t e u sono $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$-termini chiusi tali che $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(u)$ allora

$$(+) \qquad \mathcal{A} \models A(t/x) \quad \text{sse} \quad \mathcal{A} \models A(u/x).$$

5.3 Teorie, Modelli e Conseguenza Logica

La seguente importante definizione completa il quadro della semantica della logica elementare. Chiamiamo **$\mathcal{L}$-teoria** $\mathcal{T}$ un qualsiasi insieme di *enunciati* di $\mathcal{L}$ (le formule appartenenti a $\mathcal{T}$ saranno dette *assiomi* di $\mathcal{T}$).

Definizione 6. *Se $\mathcal{T}$ è una $\mathcal{L}$-teoria, si dice che $\mathcal{A}$ è* **modello** *di $\mathcal{T}$ (in simboli $\mathcal{A} \models \mathcal{T}$) qualora $\mathcal{A} \models B$ valga per ogni enunciato B appartenente a $\mathcal{T}$. Si dice che $\mathcal{T}$ è* **soddisfacibile***, qualora abbia almeno un modello. $\mathcal{T} \models A$ (letto con 'A è* **conseguenza logica** *di $\mathcal{T}$') significa che A è vera in ogni modello di $\mathcal{T}$. Una $\mathcal{L}$-formula A è un* **logicamente valida** *qualora $\mathcal{A} \models A$ valga per ogni $\mathcal{A}$.*

Tutti i teoremi che si trovano nei libri di matematica sono conseguenze logiche di un opportuno sistema assiomatico, cioè di una opportuna teoria. Il problema di decidere la nozione di conseguenza logica di una teoria è centrale in molte delle applicazioni della logica. Anche il problema del riconoscimento della correttezza delle regole di inferenza si può ridurre al problema delle conseguenze logiche di una teoria. Ad esempio, per stabilire che l'inferenza (vista nel paragrafo 1)

$$\begin{array}{l} \text{Tutti gli uomini sono mortali.} \\ \text{Socrate è un uomo.} \\ \hline \text{Quindi Socrate è mortale.} \end{array}$$

è corretta basta stabilire la relazione di conseguenza logica

$$\{\forall x(U(x) \to M(x)),\ U(a)\} \ \models\ M(a).$$

Per affrontare il problema di decidere la relazione $\mathcal{T} \models A$ spesso è utile ricorrere a metodi che siano specifici per la teoria $\mathcal{T}$ scelta; tuttavia, se $\mathcal{T}$ ha un numero finito di assiomi si può ridurre il problema di decidere la conseguenza logica di $\mathcal{T}$ al problema di decidere se una data formula è o meno logicamente valida. Infatti se $\mathcal{T} = \{B_1, \ldots, B_n\}$, si ha che A è conseguenza logica di $\mathcal{T}$ sse la formula

$$B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \to A$$

Ne segue che la clausola induttiva nella definizione di verità, ad esempio per il quantificatore esistenziale, si può equivalentemente dare nella seguente forma (detta sostituzionale)

(++) $\qquad \mathcal{A} \models \exists x A \quad$ sse $\quad \mathcal{A} \models A(t/x) \quad$ per qualche t termine chiuso di $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$

(infatti, se $\mathcal{I}(t) = a$, $\mathcal{A} \models A(t/x)$ equivale a $\mathcal{A} \models A(\bar{a}/x)$ per la (+)).

è logicamente valida.[15] La nozione di verità logica (cioè di formula logicamente valida) corrisponde alla nozione di tautologia usata nella logica proposizionale. C'è però una cruciale differenza: per la logica predicativa non è possibile adottare un procedimento di esame esaustivo (come l'ispezione di tutta la tavola di verità) per stabilire se una data formula è o meno una verità logica (bisognerebbe esaminare tutte le possibili $\mathcal{L}$-strutture, cosa chiaramente infattibile). Per questo motivo, a differenza che nel caso proposizionale, la definizione semantica di verità non è solo inefficiente, ma proprio inutilizzabile dal punto di vista computazionale.

Per un risultato classico (*il teorema di Church*), la nozione di verità logica è indecidibile, cioè non è possibile progettare un algoritmo che, presa in ingresso una formula A, termini sempre dicendo in uscita se A è una verità logica o meno. Il calcolo che proporremo costituirà perciò solo una procedura di semidecisione: data A in ingresso, se A è una verità logica, sarà sempre possibile appurarlo in modo meccanico (pur di avere risorse di calcolo illimitate in tempo ed in spazio); se non lo è, solo nei casi fortunati saremo in grado di appurarlo, nei casi sfortunati la procedura di ricerca sarà destinata a non avere mai fine. Quindi il calcolo che presenteremo, una volta implementato su un calcolatore, ci potrà porre nella situazione imbarazzante per cui, se dopo un tempo notevole di attesa non abbiamo ancora avuto la risposta, non potremo mai sapere se tale attesa è fatalmente destinata a durare per sempre o se, dando ancora un po' di tempo alla macchina, si avrebbe invece la risposta desiderata. Nonostante questi limiti di principio, va comunque osservato che il settore del ragionamento automatico ha fatto segnare in tempi recenti notevoli successi, tali da coprire un certo numero di casi di interesse sia teorico che pratico.

6 Forme Normali Negative

Una formula è in **forma normale negativa (fnn)** se e solo se non contiene implicazioni e contiene negazioni solo di fronte a sottoformule atomiche.

[15] Giustifichiamo questo passaggio in modo più dettagliato. Per definizione, A è conseguenza logica di $\mathcal{T}$ sse A è vera in ogni modello di $\mathcal{T}$, cioè se per ogni $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models \mathcal{T}$, allora $\mathcal{A} \models A$. Ma $\mathcal{T} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Quindi, quanto appena detto può essere espresso come: per ogni $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models B_1, \dots, \mathcal{A} \models B_n$, allora $\mathcal{A} \models A$. Per definizione, ciò equivale a dire che, per ogni $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \models B_1 \wedge \cdots \wedge B_n$, allora $\mathcal{A} \models A$. Ma, di nuovo, questo equivale a dire, per la definizione di verità: per ogni $\mathcal{A}$, abbiamo che $\mathcal{A} \models B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \rightarrow A$. Quest'ultima affermazione significa proprio che la formula $B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \rightarrow A$ è logicamente valida.

Due formule A, B sono **logicamente equivalenti** se e solo se $A \leftrightarrow B$ è una verità logica. Per trasformare una formula A in una formula A' in fnn *logicamente equivalente* ad A, è sufficiente eseguire (**in ordine qualunque, ma in modo esaustivo**) le seguenti trasformazioni:

$$C \to D \quad \rightsquigarrow \quad \neg C \vee D \tag{2}$$

$$\neg\neg C \quad \rightsquigarrow \quad C \tag{3}$$

$$\neg(C \vee D) \quad \rightsquigarrow \quad \neg C \wedge \neg D \tag{4}$$

$$\neg(C \wedge D) \quad \rightsquigarrow \quad \neg C \vee \neg D \tag{5}$$

$$\neg\forall x C \quad \rightsquigarrow \quad \exists x \neg C \tag{6}$$

$$\neg\exists x C \quad \rightsquigarrow \quad \forall x \neg C \tag{7}$$

Le trasformazioni vanno viste come regole di riscrittura: ossia ogniqualvolta la formula corrente A contenga una sottoformula del tipo indicato a sinistra, la si rimpiazzi con la corrispondente formula del tipo indicato a destra. La seguente proposizione è conseguenza di un lemma generale di rimpiazzamento (su cui non ci soffermiamo) [16] e del fatto che le formule a destra e a sinistra di $\rightsquigarrow$ nelle (2)-(7) sono logicamente equivalenti fra loro:

Proposizione 1. *Ogni formula è logicamente equivalente ad una formula in fnn.*

Esempio 1. Trasformiamo in fnn la formula $\neg(\exists x \forall y R(x,y) \vee \exists x R(x,x))$:

$$\begin{array}{lll} & \neg(\exists x \forall y R(x,y) \vee \exists x R(x,x)) & \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow & \neg\exists x \forall y R(x,y) \wedge \neg\exists x R(x,x)) & \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow & \forall x \neg\forall y R(x,y) \wedge \forall x \neg R(x,x)) & \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow & \forall x \exists y \neg R(x,y) \wedge \forall x \neg R(x,x)) & \end{array}$$

Un *enunciato* A è **soddisfacibile** sse esiste una struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models A$. Il calcolo che vedremo nel prossimo paragrafo affronta il problema della *soddisfacibilità di enunciati in fnn*. Quindi se lo vogliamo utilizzare per testare se un dato enunciato B è o meno una verità logica, **occorre preventivamente trasformare $\neg B$ in fnn**.

[16] Tale lemma afferma che in una formula si può rimpiazzare una sottoformula qualsiasi con un'altra ad essa logicamente equivalente mantenendo l'equivalenza logica. La dimostrazione del lemma si effettua per induzione, non è particolarmente impegnativa, ma appesantirebbe la trattazione.

7 Il Calcolo dei Tableaux

Fissiamo da qui fino alla fine delle presenti note *un linguaggio elementare* $\mathcal{L}$ e chiamiamo A un $\mathcal{L}$-enunciato in fnn che vogliamo sapere se è soddisfacibile o no. Sia $\mathcal{L}^+$ ottenuto da $\mathcal{L}$ con l'aggiunta di un'infinità numerabile di nuove costanti (che chiameremo **parametri**) $c_0, c_1, c_2, \dots$.

Usiamo le lettere greche $\Gamma, \Delta, \dots$ per indicare insiemi finiti di enunciati[17] di $\mathcal{L}^+$; notazioni come Γ, C e Γ, C, D verranno usate rispettivamente al posto di $\Gamma \cup \{C\}$ e $\Gamma \cup \{C, D\}$.

La nostra procedura costruisce un albero ai cui nodi sono associati a mo' di etichette degli insiemi finiti di enunciati di $\mathcal{L}^+$ (la radice dell'albero viene sempre etichettata con $\{A\}$).

La procedura parte dall'ipotesi che A sia soddisfacibile, per ricavarne eventuali contraddizioni: se vengono ricavate contraddizioni, si conclude l'insoddisfacibilità di A, altrimenti se ne certifica la soddisfacibilità.

Si procede nel seguente modo. Si seleziona un nodo dell'albero corrente che non abbia già successori[18] e che non sia **chiuso**, ossia che non contenga *sia una formula atomica che la sua negazione* (se tutti i nodi-foglia sono chiusi la formula è dichiarata **insoddisfacibile**); poi si prendono in considerazione le regole di espansione che esporremo tra poco. Se al nodo-foglia selezionato nessuna delle regole di espansione si applica, il nodo-foglia

[17] Se si vuole operare con formule che contengono variabili libere (cosa che non faremo per semplicità didattica), occorre tenere presente alcuni problemi relativi alla sostituzione. Li riassumiamo brevemente perchè essi sono menzionati su tutti i testi di logica. Il nostro formalismo deve consentirci di dimostrare formule del tipo $\forall x A \to A(t/x)$, tuttavia non tutte le formule tale tipo sono verità logiche. Ad esempio $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y P(y,y)$ non vale in tutte le $\mathcal{L}$-strutture (questa formula direbbe ad esempio che 'se ogni uomo ha un padre, allora c'è qualcuno che è padre di se stesso'). Questa anomalia è dovuta al fatto che la sostituzione di y ad x in $\exists y P(x,y)$ non è da ritenersi corretta: in casi come questi il termine sostituendo contiene una variabile che, a sostituzione avvenuta, risulta vincolata. Diciamo, in generale, che il termine t è sostituibile ad x in A qualora per nessuna variabile y che occorre in t ci sia una sottoformula di A del tipo $\exists y B$ (oppure del tipo $\forall y B$) contenente un'occorrenza di x che è libera in A. Per manipolare formule con variabili libere, occorre specificare che nella regola di espansione per il quantificatore universale della figura 1, la sostituzione coinvolta deve essere corretta (o, meglio, che in caso di sostituzioni scorrette, si deve passare ad una variante alfabetica, cioè ad una rinomina delle variabili vincolate). Si noti che, operando soltanto con termini chiusi, il problema non si pone: se t è chiuso, t è sempre sostituibile ad ogni x in ogni A perchè t non contiene variabili.

[18] I nodi che non hanno successori si chiamano "foglie".

è detto **terminale**: la formula è dichiarata **soddisfacibile**. Altrimenti, se una delle regole di espansione si applica, si aggiungono sotto al nodo-foglia uno/due nodi successori etichettandoli come previsto dalla regola stessa.

Vediamo quali sono le regole.

Ce n'è una per ogni connettivo o quantificatore (salvo che per la negazione e l'implicazione che sono state pretrattate con la riduzione in fnn).

- La regola di espansione per $\wedge$ è la seguente:

$$\frac{\Gamma, B \wedge C}{\Gamma, B, C}$$

  ed è giustificata dal fatto che, se abbiamo trovato una struttura in cui tutte le Γ e la $B \wedge C$ sono vere, abbiamo anche una struttura in cui tutte le Γ e la B e la C sono vere.

- La regola di espansione per $\vee$ è la seguente:

$$\frac{\Gamma, B \vee C}{\Gamma, B \parallel \Gamma, C}$$

  ed è giustificata dal fatto che, se abbiamo trovato una struttura in cui tutte le Γ e la $B \vee C$ sono vere, abbiamo anche *o* una struttura in cui tutte le Γ e la B sono vere *o* una struttura in cui tutte le Γ e la C sono vere. Questa regola di espansione è responsabile delle biforcazioni che si producono nell'albero che costruiamo.

- La regola di espansione per $\exists$ è la seguente:

$$\frac{\Gamma, \exists x B}{\Gamma, B(c/x)}$$

  ed è giustificata dal fatto che, se abbiamo trovato una struttura in cui tutte le Γ e la $\exists x B$ sono vere, abbiamo anche una struttura in cui tutte le Γ e la $B(c/x)$ sono vere. Perchè la regola sia applicata in modo corretto, occorre che il parametro c sia **nuovo**, cioè non ancora utilizzato. Il motivo di questa restrizione sta nel fatto che l'informazione 'c'è un x tale che B' può sì essere utilizzata dando un nome a tale x, ma il nome non deve collidere con altri nomi già noti, altrimenti possiamo rischiare di fare assunzioni ingiustificate su x.

- La regola di espansione per $\forall$ è la seguente:

$$\frac{\Gamma, \forall x B}{\Gamma, B(t/x), \forall x B}$$

ed è giustificata dal fatto che, se abbiamo trovato una struttura in cui Γ e $\forall x B$ sono vere, allora in essa sono vere Γ e $B(t)$ e continua ad esserlo $\forall x B$. Se non ricopiassimo $\forall x B$, l'informazione contenuta in questa formula potrebbe essere utilizzata in modo insufficitente. Il motivo è il seguente: l'informazione 'tutti gli x sono B' può essere utilizzata dicendo 't è B', 'u è B, ecc. Qui $t, u, \dots$ sono termini chiusi qualunque e sappiamo che i termini chiusi sono infiniti (semplicemente perchè i parametri sono infiniti). Quindi la regola di espansione per $\forall$ è passibile di infiniti utilizzi per ciascuna formula universalmente quantificata cui si applica. Sono però possibili, per fortuna, delle ottimizzazioni. In particolare, noi useremo sempre le seguenti due restrizioni ottimizzanti (che si dimostrano non distruggere la completezza del calcolo): (a) il termine t che si utlizza nel conseguente della regola di espansione per il quantificatore universale deve essere **vecchio**, ossia già presente nel ramo che porta al nodo cui si applica la regola;[19] (b) lungo tale ramo, la regola non si applica mai due volte con identiche modalità (cioè allo stesso t per la stessa formula $\forall x B$).

Riassumendo:

$$\frac{\Gamma, B \wedge C}{\Gamma, B, C} \qquad\qquad \frac{\Gamma, B \vee C}{\Gamma, B \parallel \Gamma, C}$$

$$\frac{\Gamma, \exists x B}{\Gamma, B(c/x)} \qquad\qquad \frac{\Gamma, \forall x B}{\Gamma, B(t/x), \forall x B}$$

Figura 1: **Regole di espansione.** (i) *c è un parametro nuovo;* (ii) *t è un termine chiuso di $\mathcal{L}^+$.*

In linea di principio, le regole di espansione si applicano in un ordine qualunque, ma ritorneremo sull'argomento per delle precisazioni importanti da un punto di vista compu-

[19] Con una unica **eccezione**: se in tale ramo *non compare alcun termine chiuso*, si prende come t un parametro qualunque, ad esempio c_0.

tazionale. Notiamo che l'applicazione di queste regole è un meccanismo analitico, perché opera scomponendo la formula iniziale, studiando come la soddisfacibilità di una formula si ripercuota sulla soddisfacibilità delle sue sottoformule.

7.1 Ricerca di Refutazioni

Il calcolo che abbiamo esposto può essere utilizzato negli esercizi per stabilire che un data formula è logicamente valida, o, altrimenti, per trovarne un contromodello. In questo paragrafo, vediamo la prima modalità di utilizzo.

Esempio 2. Per stabilire che l'inferenza

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Quindi Socrate è mortale.

è corretta, sappiamo che è sufficiente stabilire che l'enunciato

$$(\forall x(U(x) \to M(x))) \land U(s) \to M(s) \tag{8}$$

è logicamente valido. Negando e trasformando in fnn, otteniamo l'enunciato

$$\forall x(\neg U(x) \lor M(x))) \land U(s) \land \neg M(s)$$

cui applichiamo la nostra procedura. Ciò può essere fatto nel modo seguente[20]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\neg U(x) \lor M(x)), U(s), \neg U(s), \neg M(s) \qquad \forall x(\neg U(x) \lor M(x)), U(s), M(s), \neg M(s)}{\forall x(\neg U(x) \lor M(x)), \neg U(s) \lor M(s), U(s), \neg M(s)}}{\forall x(\neg U(x) \lor M(x)), U(s), \neg M(s)}}{\forall x(\neg U(x) \lor M(x)) \land U(s) \land \neg M(s)}$$

dove abbiamo utilizzato, nell'ordine, le regole di espansione per $\land, \forall$ e $\lor$: siccome tutti i nodi-foglia sono chiusi, l'enunciato in radice è insoddisfacibile, pertanto l'enunciato (8) è logicamente valido e l'inferenza è corretta.

Esempio 3. Vogliamo provare che l'enunciato

$$\forall x(P(x) \land Q(x)) \to \forall x P(x) \land \forall x Q(x) \tag{9}$$

[20]Sviluppiamo gli alberi dal basso verso l'alto (lo studente può naturalmente svilupparli dall'alto verso il basso, se preferisce).

è logicamente valido. Negando, portando in fnn e applicando le regole, si ottiene il seguente albero:[21]

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a), Q(a), \neg P(a)}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a) \wedge Q(a), \neg P(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \neg P(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x \neg P(x)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a), Q(a), \neg Q(a)}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), P(a) \wedge Q(a), \neg Q(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \neg Q(a)}}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x \neg Q(x)}
}{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x \neg P(x) \vee \exists x \neg Q(x)}
$$

Dunque l'enunciato (9) è una verità logica.

Esempio 4. Il seguente esempio dimostra che la ricopiatura delle formule universali nella regola di espansione per $\forall$ è indispensabile: Vogliamo provare che l'enunciato

$$\exists x(\exists y P(y) \to P(x)) \tag{10}$$

è logicamente valido. Procedendo nell'analisi otteniamo il seguente albero:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a), \exists y P(y), \neg P(c), \neg P(a), \forall x(\exists y P(y) \wedge \neg P(x))}{P(a), \neg P(c), \exists y P(y) \wedge \neg P(a), \forall x(\exists y P(y) \wedge \neg P(x))}}{P(a), \neg P(c), \forall x(\exists y P(y) \wedge \neg P(x))}}{\exists y P(y), \neg P(c), \forall x(\exists y P(y) \wedge \neg P(x))}}{\exists y P(y) \wedge \neg P(c), \forall x(\exists y P(y) \wedge \neg P(x))}}{\forall x(\exists y P(y) \wedge \neg P(x))}
$$

Nell'ordine (dal basso verso l'alto), abbiamo utilizzato: la regola di espansione per $\forall$ relativamente a c,[22] la regola di espansione per $\wedge$, la regola di espansione per $\exists$ con l'introduzione del parametro nuovo a, la regola di espansione per $\forall$ (per la seconda volta!) relativamente al termine vecchio a e infine di nuovo la regola di espansione per $\wedge$.

Negli esempi precedenti, la procedura si conclude sempre con una **refutazione** (una refutazione è *un albero i cui nodi-foglia sono tutti chiusi*).

La possibilità che la ricerca di una refutazione non abbia mai fine è frequente: se per esempio fra le formule che etichettano un nodo-foglia corrente compare una formula

[21] Spesso useremo le lettere $a, b, c, ...$ (invece che $c_0, c_1, \ldots$ come inizialmente stabilito) per indicare i parametri.

[22] Si osservi che viene qui usato il parametro (nuovo) c per istanziare il quantificatore universale: ciò è dovuto al fatto che nessun termine chiuso 'vecchio' era disponibile (si veda l'eccezione segnalata in nota nel paragrafo precedente). Si tratta di un evento eccezionale (negli altri casi, l'uso di parametri nuovi per la regola di espansione del quantificatore universale produce solo inutili giri viziosi).

del tipo $\forall x \exists y R(x,y)$, allora l'applicazione combinata delle due regole di espansione dei quantificatori produce un regresso all'infinito. Iniziando dalla regola per il quantificatore universale e istanziando con un termine chiuso c_0 qualunque, si ha

$$\cdots \forall x \exists y R(x,y), \exists y R(c_0,y), \cdots$$

e poi applicando la regola per il quantificatore esistenziale (qui c_1 è forzatamente un parametro nuovo) si ottiene

$$\cdots \forall x \exists y R(x,y), R(c_0,c_1) \cdots$$

A questo punto, si può applicare la regola per il quantificatore universale istanziando x su c_1

$$\cdots \forall x \exists y R(x,y), R(c_0,c_1), \exists y R(c_1,y) \cdots$$

e poi di nuovo la regola per il quantificatore esistenziale usando un parametro nuovo c_2

$$\cdots \forall x \exists y R(x,y), R(c_0,c_1), R(c_1,c_2) \cdots$$

e così via all'infinito. Certamente qualche particolare tipo di inconveniente si potrebbe eliminare con una versione più sofisticata del calcolo, ma *non esiste nessuna versione del calcolo che assicuri sempre la terminazione*, a causa del risultato di indecidibilità cui si accennava. L'indecidibilità della logica del primo ordine non significa che esistono problemi insolubili, ma che non esiste un calcolo in grado di risolvere tutti i problemi possibili. Resta, dunque, aperta l'opportunità di migliorare indefinitamente i calcoli esistenti in modo che riescano a risolvere sempre più problemi.

La possibilità di regressi all'infinito pone un problema relativamente alla strategia di ricerca di una refutazione. Consideriamo il caso in cui compaia un nodo-foglia etichettato con

$$\forall x \exists y R(x,y), \neg P(a), P(a) \wedge Q(a)$$

Se non operiamo mai sull'ultima formula a destra, otteniamo ovviamente il regresso all'infinito che abbiamo appena visto; se invece operiamo su tale formula (con la regola di espansione per $\wedge$), chiudiamo subito. Quindi non è vero che possiamo applicare le regole in un ordine qualunque, coll'idea che 'tanto poi il risultato è sempre lo stesso'. Si possono applicare le regole in un ordine qualunque, ma bisogna rispettare il seguente criterio di equità ('fairness'): **nel generare un ramo, nessuna applicazione di una regola deve**

essere dilazionata all'infinito. Il requisito di equità è sempre presente in una forma o nell'altra in tutti i tipi di calcoli che si utilizzano nell'ambito della dimostrazione automatica. Ottenere esecuzioni eque è un puro fatto di *strategia implementativa*. Il modo più semplice (non necessariamente il migliore) per farlo è di mantenere le formule dell'insieme-etichetta di un nodo in una coda: si applica la relativa regola di espansione sempre alla prima formula della coda che non sia atomica e, se si deve operare una ricopiatura, la formula ricopiata va in fondo alla coda.[23]

Una qualunque esecuzione della nostra procedura produce una successione (finita o infinita) di alberi

$$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \tag{11}$$

etichettati con insiemi finiti di enunciati di $\mathcal{L}^+$ (se A è la formula che si intende testare per la soddisfacibilità, T_0 consiste della sola radice etichettata con $\{A\}$, mentre per ogni i si ha che T_{i+1} è ottenuto da T_i applicando ad un nodo-foglia non chiuso una delle nostre quattro regole di espansione). Mediante la nozione di esecuzione equa, possiamo dare una formulazione dei teoremi classici di validità e completezza che tenga conto di qualche aspetto procedurale:

Teorema 1 (Validità)**.** *Se l'esecuzione (11) termina in una refutazione, l'enunciato A è insoddisfacibile.*

Teorema 2 (Completezza)**.** *Se l'esecuzione (11) è equa e non termina in una refutazione, allora l'enunciato A è soddisfacibile.*

Per la dimostrazione di questi due teoremi, si veda l'Appendice II.

7.2 Ricerca di Modelli

Se l'enunciato A è soddisfacibile, esso ha un modello: la dimostrazione del teorema 2 dice in modo generale come fare per estrarlo dal fallimento del processo di ricerca di una refutazione. Anche se non abbiamo dato ancora tale dimostrazione, ne riassumiamo qui le informazioni salienti utili negli esercizi.

[23] Per la regola di espansione del quantificatore universale, occorre mantenere anche code di termini da sostituire. Si noti che la ricopiatura delle formule universalmente quantificate è necessaria per ottenere il requisito di equità: i termini t da sostituire al posto della variabile quantificata possono comparire in uno stadio molto avanzato del ramo.

Per costruire un modello, è sufficiente esplorare **un solo ramo** dell'albero costruito dalla nostra procedura equa (purchè sia un ramo che non chiuda, s'intende). Tale ramo può essere finito od infinito, distinguiamo a tal proposito due casi:

(a) caso in cui il ramo è finito (terminazione);

(b) caso in cui il ramo è infinito (non terminazione).

È qualche volta possibile che, a seconda del ramo che si sceglie, si possa avere o meno terminazione.

Caso (a) (terminazione) Siamo autorizzati a dichiarare lo stato di terminazione **solo quando**:

(1) abbiamo sempre ricopiato lungo il ramo tutte le formule universali che comparivano;

(2) ci troviamo di fronte nel nodo terminale solo a formule atomiche oppure a formule il cui operatore principale è il quantificatore universale;

(3) tutte le possibili istanziazioni $B(t/x)$ (con $\forall x B$ che compare nel nodo terminale) sono già state fatte, per ogni termine chiuso t presente nel ramo.

Avendo dichiarato lo stato di terminazione, si costruisce il contromodello nel modo seguente. La struttura $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathcal{I})$ è cosí individuata:

- $\mathbf{A}$ è l'insieme dei termini chiusi t presenti nel ramo.
- per ogni simbolo di funzione f di arietà n, $\mathcal{I}(f)$ è la funzione che, calcolata sugli elementi $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{A}$, dà come risultato il termine $f(t_1, \ldots, t_n)$ se tale termine appartiene ad $\mathbf{A}$ (cioè se c'è nel ramo) e dà un valore arbitrario in caso contrario (si noti che una funzione deve essere sempre definita).
- $\mathcal{I}(P)$ (per P simbolo di predicato di arietà n) contiene i $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \mathbf{A}^n$ tali che $P(t_1, \ldots, t_n)$ appartiene all'insieme di enunciati che etichettano il nodo terminale.[24]

[24] Questo fatto si può esprimere in modo più sintetico dicendo che, nella struttura $\mathcal{A}$ che stiamo costruendo, si avrà $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ precisamente qualora l'enunciato atomico $P(t_1, \ldots, t_n)$ compare nell'etichetta del nodo terminale.

Caso (b) (non terminazione) Questo caso è più difficile, in quanto occorre prevedere dall'esterno l'andamento del ramo infinito (questo caso non è eliminabile, in quanto il calcolo non è decidibile). Si noti che non ogni ramo infinito è buono per estrarre un modello: per essere buono deve soddisfare il requisito di equità illustrato nel paragrafo precedente. Qualora si riesca a prevedere l'andamento di un ramo infinito buono, si estrae il contromodello $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{I} \rangle$ con le solite modalità:

- $\mathbf{A}$ è l'insieme dei termini chiusi t presenti nel ramo.
- $\mathcal{I}(f)$ è definito come segue:

$$\mathcal{I}(f)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \ldots, t_n) & \text{se } f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{A} \\ \text{arbitrario,} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\mathcal{I}(P) = \{\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \mid P(t_1, \ldots, t_n) \text{ compare nelle etichette del ramo}\}$.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5. Vogliamo trovare un contromodello all'enunciato

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \forall x Q(x)) \tag{12}$$

(che risulterà quindi non essere logicamente valido). A tale scopo, lo neghiamo, lo portiamo in fnn e attiviamo la nostra procedura:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a), Q(a), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \neg P(b), \neg Q(b) \ldots}{P(a), Q(a), \neg P(b) \lor Q(b), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \neg Q(b) \ldots}}{P(a), \neg P(a) \lor Q(a), \neg P(b) \lor Q(b), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \neg Q(b)}}{P(a), \neg P(a) \lor Q(a), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \neg Q(b)}}{P(a), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \neg Q(b)}}{P(a), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \exists x \neg Q(x)}}{\exists x P(x), \forall x(\neg P(x) \lor Q(x)), \exists x \neg Q(x)}}{\forall x(\neg P(x) \lor Q(x)) \land \exists x P(x) \land \exists x \neg Q(x)}$$

Abbiamo applicato nell'ordine le regole di espansione per $\land, \exists$ (due volte), $\forall$ (due volte) e $\lor$ (due volte). I puntini indicano rami in sospeso, dovuti alle altre diramazioni della regola per $\lor$ che non è necessario analizzare (poichè stiamo cercando un contromodello, ci basta aver trovato un ramo che non chiude, indipendentemente da quanto succede sugli altri rami). Nel nodo terminale, ci sono solo formule atomiche e la formula quantificata universalmente $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$: quest'ultima è stata istanziata su tutti i termini chiusi presenti nel ramo (che sono a e b), pertanto possiamo dichiarare lo stato di terminazione. Otteniamo il seguente contromodello $\mathcal{A}$: $\mathbf{A} = \{a, b\}$ e $\mathcal{A} \models P(a)$, $\mathcal{A} \models Q(a)$. È facile verificare che si ha proprio $\mathcal{A} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$ e $\mathcal{A} \not\models \forall x Q(x)$: quindi l'enunciato (12) è falsificato da $\mathcal{A}$ e pertanto non è logicamente valido.

Esempio 6. La seguente inferenza è chiaramente errata:

Tutte le ciminiere fumano.
Mia nonna fuma.
Quindi mia nonna è una ciminiera.

Per provarlo, basta trovare un contromodello all'enunciato

$$\forall x(C(x) \to F(x)) \wedge F(n) \to C(n). \tag{13}$$

Ciò può essere fatto nel modo seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\neg C(x) \vee F(x)), F(n), \neg C(n) \ldots}{\forall x(\neg C(x) \vee F(x)), F(n), \neg C(n) \vee F(n), \neg C(n)}}{\forall x(\neg C(x) \vee F(x)), F(n), \neg C(n)}}{\forall x(\neg C(x) \vee F(x)) \wedge F(n) \wedge \neg C(n)}$$

dove abbiamo utilizzato, nell'ordine, le regole di espansione per $\wedge, \forall$ e $\vee$, raggiungendo lo stato di terminazione (si osservi che nell'ultimo passaggio la formula $\neg C(n)$ non è stata aggiunta perchè era già presente) .

Esempio 7. Vogliamo trovare un contromodello all'enunciato

$$\neg(\exists x P(x) \wedge (\forall y(P(y) \to P(f(y))))) \tag{14}$$

che non è logicamente valido. Procedendo nel solito modo si ottiene

$$\vdots$$
$$\dfrac{P(a), P(f(a)), \ldots, P(f^i(a)), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y)))}{\vdots}$$
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a), P(f(a)), P(f(f(a))), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y))) \ldots}{P(a), P(f(a)), \neg P(f(a)) \vee P(f(f(a))), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y)))}}{P(a), P(f(a)), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y))) \ldots}}{P(a), \neg P(a) \vee P(f(a)), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y)))}}{P(a), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y)))}}{\exists x P(x), \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y)))}}{\exists x P(x) \wedge \forall y(\neg P(y) \vee P(f(y)))}$$

Qui abbiamo chiaramente un ramo che non termina, ma di cui siamo riusciti a farci un'idea precisa (si noti che l'espressione 'farsi un'idea precisa' indica un'operazione non meccanizzabile). Otteniamo quindi il seguente contromodello $\mathcal{A}$: $\mathbf{A} = \{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots\}$ e $\mathcal{A} \models P(a), \mathcal{A} \models P(f(a)), \ldots, \mathcal{A} \models P(f^i(a)), \ldots$ Il contromodello che ci ha fornito la nostra procedura semi-automatica non è certamente il più economico possibile: potevamo ad esempio prendere una struttura con un solo elemento a, porre $f(a) = a$ e $\mathcal{I}(P) = \{a\}$. Tuttavia, la procedura semiautomatica ha il merito di fornirci (in un senso che andrebbe precisato), contromodelli al massimo grado di generalità.

7.3 Ulteriori Esempi

In questo paragrafo mostriamo come utilizzare quanto abbiamo appreso in alcuni ambiti specifici. Tenendo conto della esiguità del materiale di un corso propedeutico, gli esempi che potremo presentare saranno piuttosto gracili, speriamo tuttavia che essi aiutino a comprendere l'utilità dell'approccio logico a problemi di varia natura (linguistico, matematico, informatico).

I limiti a cui dobbiamo sottostare sono di una duplice natura: a) di natura espressiva, dovuti al fatto che sappiamo trattare solo problemi formalizzabili nella logica del primo ordine senza identità; b) di natura realizzativa, dovuti al fatto che il calcolo che abbiamo presentato non è molto efficiente per problemi significativi.

Esempio 8. Supponiamo di voler formalizzare il seguente ragionamento: '*Paolo e Carlo sono fratelli; Paolo ha un cugino, quindi anche Carlo ha un cugino*'. Questo ragionamento non è puramente logico, esso soggiace a 'postulati di significato' (nel senso di Carnap) relativi all'uso delle parole 'fratello, cugino'; tali postulati devono essere specificati interamente per procedere ad un'opportuna formalizzazione. Siccome non abbiamo analizzato le regole logiche per l'identità, invece del linguaggio $\mathcal{L}_1$ del paragrafo 4, scegliamo un linguaggio più semplice contenente una sola relazione binaria $G(x, y)$ (che leggiamo con 'x è genitore di y'). In tale linguaggio possiamo definire $F(x, y)$ ('x è fratello di y') con $\forall z(G(z, x) \leftrightarrow G(z, y))$ ed anche $C(x, y)$ ('x è cugino di y') con $\exists z \exists w(F(z, w) \wedge G(z, x) \wedge G(w, y))$. Usiamo la costante a per Andrea e la costante c per Carlo. Si tratta ora semplicemente di provare che l'enunciato

$$F(a, c) \wedge \exists y C(a, y) \to \exists y C(c, y)$$

è logicamente valido (si ricordi che C e F sono in realtà abbreviazioni per le formule che abbiamo introdotto sopra). Ritroviamo quindi un esercizio analogo a quelli del paragrafo 7.1, che può essere facilmente risolto con le tecniche di ricerca di una refutazione là illustrate.

Esempio 9. In alcuni casi si possono ritrovare inferenze che possono sembrare un po' paradossali, ma il paradosso risiede tutto nell'ambiguità del linguaggio ordinario. Dalle due premesse (che possiamo ritenere plausibilmente vere) *Alcuni pazienti amano tutti i dottori* e *Nessun paziente ama un incapace*, formalizzate rispettivamente con[25]

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to A(x, y)))$$

e con

$$\forall y \forall x(P(x) \wedge A(x, y) \to \neg I(y))$$

segue il fatto (plausibilmente falso) che *Non esistono dottori incapaci.* Questo perchè possiamo appurare con le nostre tecniche che l'enunciato

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to A(x, y))) \wedge \forall y \forall x(P(x) \wedge A(x, y) \to \neg I(y)) \to \neg \exists x(D(x) \wedge I(x))$$

è logicamente valido. La spiegazione dell'apparente paradosso sta nel fatto che *incapace* è usato in senso soggettivo nella seconda premessa e in senso oggettivo nella conclusione dell'inferenza.

[25] Abbiamo usato tre predicati unari $P(x), D(x), I(x)$ (rispettivamente per 'x è un paziente, un dottore, un incapace') e un predicato binario $A(x, y)$ (per 'x ama y'). Le traduzioni dal linguaggio ordinario al linguaggio formalizzato che facciamo sono piuttosto empiriche; lo studio di metodi sistematici per tali traduzioni rientra nel settore della semantica dei linguaggi naturali.

Esempio 10. Anche il metodo di ricerca di contromodelli del paragrafo 7.2 può essere utile in esempi linguistici concreti. Se manteniamo le due premesse dell'esempio precedente, possiamo chiederci se da esse segue che *Esistono dottori amati da tutti i pazienti*; questo equivale a chiederci se l'enunciato

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to A(x,y))) \wedge \forall y \forall x(P(x) \wedge A(x,y) \to \neg I(y)) \to$$

$$\to \exists x(D(x) \wedge \forall y(P(y) \to A(y,x))$$

sia o meno logicamente valido. Di fatto non lo è e la ricerca di un contromodello produce varie possibilità in proposito (a seconda del ramo non chiuso che si sceglie). Ad esempio, si ottiene facilmente che un contromodello è fornito da una situazione limite in cui c'è una sola persona in gioco, che è un paziente, non è un dottore e non è un incapace.

8 Appendice I: nozioni preliminari

Riportiamo in questa appendice alcuni concetti di base.[26]

Teoria ingenua degli insiemi.

La nozione di **insieme** viene data per intuitiva e inanalizzata (in un corso specifico di teoria degli insiemi si vedrà eventualmente qualche sistema assiomatico che la tratta in maniera più rigorosa). Similmente, diamo per intuitiva la nozione di **funzione** $f : X \longrightarrow Y$ fra gli insiemi X e Y: la f viene genericamente definita come una 'legge' che ad ogni elemento di X (detto insieme dominio) fa corrispondere uno ed un solo elemento di Y (detto insieme codominio). Raddoppiare un numero per esempio è dare una funzione dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in sè. Individuare la madre, è dare una funzione dall'insieme degli esseri umani nell'insieme degli esseri umani di sesso femminile. Invece, considerare i figli non è una funzione dall'insieme degli esseri umani verso l'insieme degli esseri umani per ben due motivi: non tutti gli esseri umani hanno figli e non tutti ne hanno uno solo, sicchè viene violato il tratto distintivo della nozione di funzione che, ripetiamo, consiste nell'essere una corrispondenza sempre definita e definita in modo univoco.

La nozione di **prodotto cartesiano** di n-insiemi $X_1, \dots, X_n$ è la seguente: il prodotto cartesiano, che scriviamo con

$$X_1 \times \cdots \times X_n$$

è l'insieme delle liste $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ di n elementi (dette n-ple) di elementi appartenenti, rispettivamente, ad $X_1, X_2, \dots, X_n$. Così ad esempio, l'insieme dei tailleurs è il prodotto cartesiano dell'insieme delle giacche e dell'insieme delle gonne; un altro esempio è fornito dai punti del piano che si possono identificare con le coppie di punti presi uno dalla retta delle ascisse e uno dalla retta delle ordinate.

Quando $X_1, \dots, X_n$ concidono tutti con uno stesso insieme X, cioè quando gli X_i sono tutti uguali, usiamo la notazione X^n per indicare il relativo prodotto cartesiano, detto anche **potenza** n-esima dell'insieme X. Per $n = 1$, X^1 è X stesso; per $n = 0$, è utile identificare la potenza 0-esima X^0 di X con l'insieme $\mathbf{1}$ definito come un qualsiasi insieme

[26] Il riassunto che segue é strettamente finalizzato a richiamare nozioni che sono state utilizzate nei paragrafi precedenti.

con un elemento solo (ad esempio si può porre $\mathbf{1} := \{*\}$). Si noti che una funzione

$$c : \mathbf{1} \longrightarrow X$$

è univocamente specificata una volta noto l'elemento $c(*) \in X$, perchè associa, appunto, a $*$ l'elemento $c(*) \in X$; quindi le funzioni $\mathbf{1} \longrightarrow X$ possono a buon diritto essere confuse con gli elementi di X stesso.

Un **sottoinsieme** di un insieme X è un insieme composto da alcuni (magari nessuno, magari tutti) degli elementi di X. L'insieme delle **parti** $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X.

Una **relazione** n-aria su un insieme X è un sottoinsieme della potenza n-esima di X (per $n = 1$, dunque, una relazione unaria è un sottoinsieme della potenza 1-esima di X, cioè è semplicemente un sottoinsieme di X). Ad esempio, la relazione 'essere amico di' è la relazione che contiene le coppie di esseri umani che sono amici tra di loro; 'essere minore di' è l'ovvia relazione fra numeri naturali che tutti conosciamo (tale relazione conterrà ad esempio le coppie $\langle 2, 3\rangle, \langle 12, 45\rangle, \dots$, ma non la coppia $\langle 3, 2\rangle$).

Uso del principio di induzione.

Il principio di induzione è un metodo molto potente per dimostrare proprietà dei numeri naturali e, attraverso di essi, anche di strutture discrete di vario tipo. In un corso di logica, lo si utilizza prevalentemente per trattare con formule e con dimostrazioni.

Il **principio di induzione** dice, per una data proprietà P, che:

(i) se P è goduta dal numero 0 e

(ii) se dall'informazione che P è goduta dal numero n, possiamo inferire che P è goduta anche dal numero $n + 1$,

allora possiamo concludere che P vale per ogni numero naturale n.[27]

Intuitivamente, l'idea è che, se valgono (i) e (ii), allora possiamo concludere

$$P(0), P(1), P(2), \dots$$

[27]C'e' una variante, apparentemente più forte che sostituisce (i)+(ii) con un'unica condizione; tale variante si chiama **induzione sul decorso dei valori** e autorizza a concludere che P vale per ogni numero naturale n, qualora: (iii) *per ogni n, dall'informazione che P è goduta da ogni $m < n$, si può inferire che P è goduta anche da n.* L'uso dell'induzione sul decorso dei valori è molto comune in logica (vedi oltre).

e quindi arrivare a stabilire che vale $P(n)$ per qualsiasi n.

Il principio di induzione è quindi un principio di ragionamento abbastanza intuitivo, tuttavia il suo status non è quello di una legge logica: piuttosto, si tratta di un assioma specifico per una teoria dei numeri naturali o di un teorema che si dimostra solo da assiomi ancora più potenti, ad esempio all'interno della teoria degli insiemi. In ogni caso, consideriamo l'induzione parte della metateoria intuitiva che utilizziamo in queste note.

Per imparare ad usarlo, vediamo un esempio numerico. Sia P la proprietà che dice che la somma

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

è uguale a $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Vogliamo stabilire che tale proprietà vale per ogni $n \geq 1$. Chiaramente vale $P(0)$, perchè $\frac{0 \cdot 1}{2} = 0$. Supponiamo ora che P valga per n e stabiliamo che P vale per $n + 1$. Vogliamo cioè provare che la somma

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1)$$

vale $\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$. Sfruttando l'ipotesi induttiva (ossia l'informazione che la proprietà P è goduta da n), ricaviamo che

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2},$$

come si voleva.

L'induzione può essere utilizzata anche per *definire* delle funzioni numeriche: ad esempio, si può definire la funzione $n!$ ponendo

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \\ (n + 1)! &= (n + 1) \cdot n!. \end{aligned}$$

Il risultato è la funzione fattoriale che, calcolata su n, restituisce il prodotto dei primi n numeri. Questa definizione mediante l'induzione non solo è più rigorosa della definizione 'a parole', ma consente anche di stabilire proprietà della funzione $n!$ utilizzando appunto l'induzione: basta separare i casi $n = 0$ e $n > 0$ in modo che, nel secondo caso, si possa utilizzare il risultato già acquisito induttivamente per il caso $n - 1$ (si provi a far così ad esempio per stabilire la proprietà $n! \geq n$).

Si può utilizzare l'induzione nella matematica discreta associando agli enti che si stanno trattando dei numeri naturali e facendo poi induzione sui numeri associati. In logica, si può associare ad una formula A (ad esempio della logica proposizionale) il numero $c(A)$ dei connettivi che compaiono in essa: così avremo ad esempio $c(p) = 0$, $c((p_1 \wedge p_2) \to p_3) = 2$, ecc. L'idea è poi di *stabilire proprietà/fare definizioni su A lavorando per induzione su* $c(A)$.

Vediamo un esempio, sempre in logica proposizionale. La definizione di *insieme delle sottoformule* $Sub(A)$ di una formula A è la seguente:

- $Sub(p) = \{p\}$, per ogni lettera proposizionale p;
- $Sub(A_1 \wedge A_2) = \{A_1 \wedge A_2\} \cup Sub(A_1) \cup Sub(A_2)$;
- $Sub(A_1 \vee A_2) = \{A_1 \vee A_2\} \cup Sub(A_1) \cup Sub(A_2)$;
- $Sub(A_1 \rightarrow A_2) = \{A_1 \rightarrow A_2\} \cup Sub(A_1) \cup Sub(A_2)$;
- $Sub(\neg A_1) = \{\neg A_1\} \cup Sub(A_1)$.

Come si vede, la definizione è per induzione su $c(A)$, nel senso che si distingue il caso $c(A) = 0$ (ossia, il caso in cui A è una lettera proposizionale) dal caso in cui $c(A) > 0$: in questo secondo caso, A 'comincia' con un connettivo e diamo per nota la definizione di $c(B)$ per tutte le B con $c(B) < c(A)$.[28]

Usiamo ora la definizione appena data per dimostrare (in modo rigoroso) che, date tre formule A, B, C, vale il seguente fatto

$$\text{se } A \in Sub(B) \text{ e } B \in Sub(C), \text{ allora } A \in Sub(C).$$

Facciamo induzione su $c(C)$. Se $c(C) = 0$, allora l'unico caso possibile è che A, B, C coincidano tutte con la stessa lettera proposizionale p, per cui l'asserto è banale. Supponiamo ora che $c(C) > 0$:[29] ci sono quattro casi, a seconda che il connettivo principale di C sia $\wedge, \vee, \rightarrow$ o $\neg$. Sviluppiamo solo il primo caso, essendo gli altri tre analoghi. Ora, se C è $C_1 \wedge C_2$ e B è sottoformula di C, ci sono tre possibilità: (i) B è uguale a C (in tal caso, l'asserto segue banalmente dal fatto che A è sottoformula di B); (ii) B è sottoformula di C_1; (iii) B è sottoformula di C_2. Nel caso (ii), possiamo concludere, per ipotesi induttiva, che A è sottoformula di C_1[30] e quindi anche di C (essendo le sottoformule di C date da C stessa e dalle sottoformule di C_1 e di C_2, per definizione). Il caso (iii) è completamente analogo.

---

[28] Si tratta quindi di un'induzione sul decorso dei valori.

[29] Anche qui siamo in presenza di una induzione sul decorso dei valori,

[30] Si osservi che $c(C_1) < c(C)$, per cui l'ipotesi induttiva si applica a C_1.

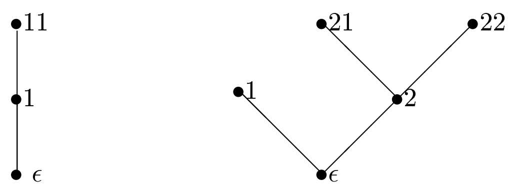
9 Appendice II: dimostrazione dei teoremi di validità e completezza

Riportiamo qui la dimostrazione dei teoremi di validità e completezza enunciati nel paragrafo 7.1.

Prima di farlo, elenchiamo alcune nozioni sugli alberi: tali nozioni possono essere comprese senza difficoltà già ad un livello intuitivo, riportiamo le relative definizioni formali per completezza e chiarezza. Definiamo gli alberi come insiemi di liste di numeri naturali, avvertendo però che in letteratura sono note anche altre definizioni della nozione di albero, non necessariamente equivalenti alla nostra. L'idea è di caratterizzare un albero tramite un opportuno modo di attribuire numeri naturali ad ogni suo nodo. Vediamo come.

Con N indichiamo l'insieme dei numeri naturali (zero escluso) e con N^* l'insieme delle liste finite di numeri naturali (inclusa la lista vuota che chiamiamo ϵ). Un **albero** T è un sottoinsieme non vuoto di N^* (cioè un insieme di liste di numeri naturali) con le seguenti proprietà: i) se $\alpha \in T$ e $\alpha = \beta\gamma$, allora $\beta \in T$; ii) se $\alpha i \in T$ e $j < i$, allora $\alpha j \in T$.

Per esempio, i due alberi della figura sottostante corrispondono rispettivamente agli insiemi di liste $\{\epsilon, 1, 11\}$ e $\{\epsilon, 1, 2, 21, 22\}$. Il nodo 21 dell'albero (b) viene così indicato perchè il percorso per raggiungerlo dalla radice consiste nel prendere il secondo nodo della biforcazione e poi il primo nodo della biforcazione successiva. Lette in questo modo, le condizioni i) e ii) della definizione di albero risultano trasparenti: la condizione i) dice che se l'albero contiene il percorso che arriva al nodo α deve contenere ogni segmento iniziale di tale percorso, mentre la condizione ii) dice ad esempio che, se la biforcazione al nodo α contiene il terzo successore $\alpha 3$, allora deve contenere anche il primo ed il secondo dei successori, cioè $\alpha 1$ e $\alpha 2$.



(a) (b)

Per ogni nodo α, i nodi del tipo αi sono detti successori immediati (o figli) di α. Un nodo senza successori immediati è detto foglia. T è a ramificazione finita sse ogni nodo di T ha un numero finito di successori immediati. Un ramo di T è una successione $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ (finita o infinita) tale che ogni α_{i+1} è successore immediato di α_i, cioè è del tipo $\alpha_i n$ per qualche $n \in N$. Un ramo completo è un ramo in cui α_0 è la radice e che è o infinito oppure il cui ultimo elemento è una foglia. Entrambi gli alberi (a) e (b) della figura sopra sono a ramificazione finita. Nell'albero descritto in (a) esiste un'unica foglia, il nodo 11.

Nell'albero in (b) le foglie sono i nodi 1 e 21, 22. Un esempio di ramo (completo) nell'albero in (b) è la seguente successione: ϵ,2,21. In (b) la radice ϵ ha due successori immediati, i nodi 1 e 2, in (a) la radice ϵ ha un solo successore immediato, il nodo 1.

Supponiamo di applicare la nostra procedura di ricerca di una refutazione e di produrre via via degli alberi

$$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \tag{15}$$

etichettati con insiemi finiti di enunciati di $\mathcal{L}^+$; supponiamo che T_0 sia l'albero costituito dalla sola radice, etichettata con un certo Γ_0 (usualmente, Γ_0 consisterà di un solo enunciato, ossia dell'enunciato che vogliamo testare per la soddisfacibilità). Chiamiamo T_∞ l'unione degli alberi etichettati T_i (che sono l'uno incluso nell'altro): si noti che ogni ramo di T_∞ potrà essere finito o infinito e, nel caso in cui sia finito, potrà essere chiuso o no.

Nel caso in cui (15) sia una refutazione, la successione stessa è finita (in simboli: $T_\infty = T_i$ per un certo i) e tutti i rami di T_i sono chiusi. In tal caso, il teorema di validità dice che non è possibile soddisfare simultaneamente tutte le formule di Γ_0, cioè tutte le formule della radice:

Teorema di validità. *Se l'esecuzione (15) termina in una refutazione, non esiste una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma_0$.*[31]

Dim. Sia T una refutazione, la cui radice sia etichettata con Γ_0: per induzione sul numero N dei nodi di T, proviamo che non esiste una $\mathcal{L}^+$ struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models B$ per ogni $B \in \Gamma_0$.

Il caso $N = 1$ è banale: un albero con un solo nodo etichettato Γ_0 è una refutazione solo se Γ_0 contiene sia A che $\neg A$ per un certo enunciato A: chiaramente A e $\neg A$ non possono essere vere entrambe simultaneamente.

Supponiamo che sia $N > 1$ e facciamo quattro casi, a seconda di quale sia la regola applicata per generare i nodi figli della radice di T.

- *Primo caso:* è stata applicata la regola per la congiunzione; quindi, la radice di T è etichettata con $\Gamma, B_1 \wedge B_2$ e ha un solo figlio che è etichettato con Γ, B_1, B_2. Applicando l'ipotesi induttiva alla refutazione che ha come radice tale nodo figlio, sappiamo che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models B_1$ e $\mathcal{A} \models B_2$. Segue, che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B_1 \wedge B_2$, come richiesto.

[31] Ricordiamo dal paragrafo 5.3 che $\mathcal{A} \models \Gamma_0$ significa $\mathcal{A} \models B$, per ogni $B \in \Gamma_0$.

- *Secondo caso:* è stata applicata la regola per la disgiunzione; quindi, la radice di T è etichettata con $\Gamma, B_1 \vee B_2$ e ha due figli che sono etichettati con Γ, B_1 e con Γ, B_2, rispettivamente. Applicando l'ipotesi induttiva alle due refutazioni che hanno come radici tali nodi figli, sappiamo che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B_1$ e che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B_2$. Segue, che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B_1 \vee B_2$, come richiesto (se esistesse una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B_1 \vee B_2$, allora esisterebbe una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B_i$, per $i = 1$ o $i = 2$).

- *Terzo caso:* è stata applicata la regola per il quantificatore universale; quindi, la radice di T è etichettata con $\Gamma, \forall x B$ e ha un solo figlio che è etichettato con $\Gamma, \forall x B, B(t/x)$, per qualche termine chiuso t di $\mathcal{L}^+$. Applicando l'ipotesi induttiva alla refutazione che ha come radice tale nodo figlio, sappiamo che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models \forall x B$ e $\mathcal{A} \models B(t/x)$. Ne segue che, in particolare, non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models \forall x B$: questo perchè, se in una strutture vale $\mathcal{A} \models \forall x B$, allora deve valere anche $\mathcal{A} \models B(t/x)$.[32]

- *Quarto caso:* è stata applicata la regola per il quantificatore esistenziale; quindi, la radice di T è etichettata con $\Gamma, \exists x B$ e ha un solo figlio che è etichettato con $\Gamma, B(c/x)$, per qualche parametro c che non compare in $\Gamma, B(x)$. Applicando l'ipotesi induttiva alla refutazione che ha come radice tale nodo figlio, sappiamo che non esiste nessuna $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models B(c/x)$. Sia per assurdo $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}^+$-struttura tale che valgono $\mathcal{A} \models \Gamma$ e $\mathcal{A} \models \exists x B$; per qualche elemento a del dominio di tale $\mathcal{L}^+$-struttura, varrà $\mathcal{A} \models B(\bar{a}/x)$. Possiamo modificare la $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$, ottenendo una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}'$ che è esattamente come $\mathcal{A}$, solo che il parametro c è ora interpretato su a. Siccome gli enunciati Γ non contengono il parametro c, essi saranno ancora tutte veri in $\mathcal{A}'$. Quanto al valore di verità di $B(c/x)$, siccome in $\mathcal{A}'$ ora $\bar{a}$ e c hanno la stessa interpretazione (ossia sono entrambi interpretati sull'elemento a), ne risulta dalla (+) della nota 14 del paragrafo 5.2, che $A(\bar{a}/x)$ e $A(c/x)$ hanno lo stesso valore di verità in $\mathcal{A}'$. Ma l'enunciato $A(\bar{a}/x)$ è vero in $\mathcal{A}$ ed anche in $\mathcal{A}'$, perchè a sua volta la formula $A(x)$ non contiene il parametro c.

[32] Si ricordi la (++) della nota 14 del paragrafo 5.2.

Quindi anche l'enunciato $A(c/x)$ è vero in $\mathcal{A}'$. Abbiamo così stabilito che gli enunciati $\Gamma, A(c/x)$ sono tutti veri in $\mathcal{A}'$, contro l'ipotesi induttiva. $\dashv$

Proviamo ora anche il più impegnativo risultato di completezza:

Teorema di completezza. *Se l'esecuzione (15) è equa e non termina in una refutazione, allora esiste una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}$ tale che vale $\mathcal{A} \models \Gamma_0$.*

Dim. Consideriamo l'albero T_∞: esso può essere finito, nel qual caso ha un ramo completo terminato e aperto, oppure è infinito ed anche in questo caso possiede un ramo completo (che sarà infinito). Questo per il lemma di König, che dice che un albero infinito a diramazione finita possiede sempre un ramo infinito (vedi oltre per la dimostrazione).

Sia ρ tale ramo completo (finito o infinito che sia) e siano $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ gli insiemi di formule che etichettano i nodi di ρ. Definiamo qui sotto la nozione di *insieme di Hintikka* e poi facciamo vedere che l'unione degli insiemi di formule $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots$ soddisfa le condizioni della definizione di insieme di Hintikka; infine mostriamo come convertire un insieme di Hintikka H in una $\mathcal{L}^+$-struttura che rende vere le $A \in H$ (nel caso che ci interessa H è $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots$ e quindi tale $\mathcal{A}$ renderà vere in particolare le formule di Γ_0 come richiesto).

Un insieme H di enunciati è un insieme di Hintikka sse soddisfa le seguenti proprietà:

(H0) nessuna formula atomica chiusa A di $\mathcal{L}^+$ è tale che $A \in H$ e $\neg A \in H$;

(H1) se H contiene $A_1 \wedge A_2$, allora contiene A_1 e A_2;

(H2) se H contiene $A_1 \vee A_2$, allora contiene A_1 o A_2;

(H3) se H contiene $\exists x A$, allora contiene $A(t)$ per qualche termine chiuso t di $\mathcal{L}^+$;[33]

(H4) se H contiene $\forall x A$, allora contiene $A(t/x)$ per ogni termine chiuso t di $\mathcal{L}^+$ che compare in qualche formula di H.

La proprietà (H0) è goduta dall'insieme unione $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots$ perché le formule atomiche e atomiche negate non vengono mai rimosse e non ci può essere un Γ_i che contenga sia una formula atomica che la sua negazione (altrimenti, il ramo sarebbe chiuso). Le proprietà (H1)-(H4) sono godute dall'insieme unione $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots$ per la definizione di equità.

[33]Per come è stata definita la nostra procedura, questo t sarà in effetti un certo parametro c.

Infatti, se ad esempio Γ_i contiene $A_1 \wedge A_2$, ci sarà un Γ_j che contiene sia A_1 che A_2 perchè la regola di espansione per la congiunzione dovrà essere prima o poi applicata ad $A_1 \wedge A_2$ per equità. Un discorso analogo vale per le disgiunzioni e per i quantificatori (per il quantificatore universale, è essenziale il fatto che esso sia ricopiato come previsto dalla regola di espansione per $\forall$, così lo si può usare tante volte quanti sono i termini chiusi si generano via via nel ramo). $\dashv$

Dimostriamo ora il

Lemma *Dato un insieme di Hintikka H, esiste una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}_H$ tale che per ogni $A \in H$ si ha $\mathcal{A}_H \models A$.*

Dim. Definiamo una $\mathcal{L}^+$-struttura $\mathcal{A}_H = (\mathbf{A}_H, \mathcal{I}_H)$ nel modo seguente:

- $\mathbf{A}_H$ è l'insieme dei termini chiusi di $\mathcal{L}^+$ che compaiono in H;
- se f è un simbolo di funzione di arietà n, si definisce $\mathcal{I}_H(f)$ come segue:

$$\mathcal{I}_H(f)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \ldots, t_n), & \text{se } f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{A}_H \\ \text{arbitrario}, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

- se P è un simbolo di predicato di arietà n, si definisce $\mathcal{I}_H(P)$ come l'insieme dei $(t_1, \ldots, t_n)$ tali che $P(t_1, \ldots, t_n) \in H$.

Per induzione, è facile verificare che

$$(*) \qquad \mathcal{I}_H(t) = t$$

per ogni termine chiuso di $\mathcal{L}^+$ che compare in H (si osservi che se un termine compare in un insieme di formule, anche i suoi sottotermini banalmente vi compaiono).[34] Verifichiamo ora per induzione su A che, se $A \in H$, allora $\mathcal{A}_H \models A$.

- Se A è atomica, (diciamo che sia $P(t_1, \ldots, t_n)$), abbiamo $\mathcal{A}_H \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sse (per le clausole di verità del paragrafo 5.2) $(\mathcal{I}_H(t_1), \ldots, \mathcal{I}_H(t_n)) \in \mathcal{I}_H(P)$ sse (per la (*)) $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{I}_H(P)$ see (per la definizione di $\mathcal{I}_H$ appena data) $P(t_1, \ldots, t_n) \in H$.

[34] La $(*)$ è ovvia per le costanti (infatti $\mathcal{I}_H(c) = c$ vale per le costanti per la definizione di $\mathcal{I}_H$). Se t è del tipo $f(t_1, \ldots, t_n)$, abbiamo che $\mathcal{I}_H(t) = \mathcal{I}_H(f)(\mathcal{I}_H(t_1), \ldots, \mathcal{I}_H(t_n))$ (per le definizioni del paragrafo 5.2); inoltre $\mathcal{I}_H(f)(\mathcal{I}_H(t_1), \ldots, \mathcal{I}_H(t_n)) = \mathcal{I}_H(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n) = t$ per ipotesi induttiva e per la definizione di $\mathcal{I}_H$.

- Se A è atomica negata, diciamo $\neg P(t_1, \dots, t_n)$, sappiamo dal caso precedente che $\mathcal{A}_H \models P(t_1, \dots, t_n)$ vale sse $P(t_1, \dots, t_n) \in H$. Per (H0), $P(t_1, \dots, t_n) \notin H$, quindi[35] $\mathcal{A}_H \not\models P(t_1, \dots, t_n)$ e infine $\mathcal{A}_H \models \neg P(t_1, \dots, t_n)$, applicando le clausole di verità del paragrafo 5.2.

- Sia A uguale a $A_1 \wedge A_2$. Se $A \in H$, allora $A_1, A_2 \in H$ per (H1); $\mathcal{A}_H \models A_1 \wedge A_2$ vale sse, applicando le clausole di verità del paragrafo 5.2, ($\mathcal{A}_H \models A_1$ e $\mathcal{A}_H \models A_2$), cose che valgono entrambe per ipotesi induttiva.

- Sia A uguale a $A_1 \vee A_2$. Se $A \in H$, allora $A_1 \in H$ o $A_2 \in H$ per (H2), sia ad esempio $A_1 \in H$; allora $\mathcal{A}_H \models A_1$ per ipotesi induttiva e quindi, applicando le clausole di verità del paragrafo 5.2, $\mathcal{A}_H \models A_1 \vee A_2$.

- Sia A uguale a $\exists x B$; allora $B(t) \in H$ per qualche termine chiuso t di $\mathcal{L}^+$ (per (H3)), quindi $\mathcal{A}_H \models B(t)$ (per ipotesi induttiva) e perciò $\mathcal{A}_H \models \exists x B(x)$ (per la (++) della nota 14 del paragrafo 5.2).

- Se A è $\forall x B$, allora $B(t) \in H$ per ogni $t \in \mathbf{A}_H$ per (H4), perciò vale $\mathcal{A}_H \models B(t)$ per ogni $t \in \mathbf{A}_H$ per ipotesi induttiva. Ogni $a \in \mathbf{A}_H$ è uguale ad un termine chiuso t di $\mathcal{L}^+$; siccome $\mathcal{I}_H(\bar{a}) = a = t = \mathcal{I}_H(t)$ (per la $(*)$), $\mathcal{A}_H \models B(\bar{a})$ equivale a $\mathcal{A}_H \models B(t)$ (si ricordi la (++) della nota 14 del paragrafo 5.2), che sappiamo valere. Perciò, siccome vale $\mathcal{A}_H \models B(\bar{a})$ per ogni $a \in \mathbf{A}_H$, possiamo concludere $\mathcal{A}_H \models \forall x B$. $\dashv$

Resta in sospeso solo la dimostrazione del lemma di König: tale risultato non ha nulla a che fare con i calcoli logici, trattandosi di un principio combinatorio (che si può essere tentati, non senza qualche ragione, di considerare intuitivamente evidente).

Lemma (di König) *Un albero infinito T (cioè un albero con un numero infinito di nodi), a diramazione finita possiede un ramo infinito.*

Dim. Procediamo secondo il seguente schema: (i) definiamo una nozione di prolungabilità per nodi di un albero; (ii) facciamo vedere che, se T è infinito e ha diramazione finita, la radice di T è prolungabile; (iii) dall'informazione che la radice di T è prolungabile, estraiamo un ramo infinito all'interno di T.

Passo (i). Se $\beta \in N^*$, $|\beta|$ indica la lunghezza di β. Un nodo β di T si dice *prolungabile* sse l'insieme $\{|\gamma| \mid \beta\gamma \in T\}$ non è superiormente limitato, ossia sse non esiste un numero naturale K maggiore di tutte le lunghezze dei γ tali che la lista $\beta\gamma$ (ottenuta giustapponendo β e γ) appartiene a T. Si noti che se un nodo è prolungabile, tale è uno dei suoi successori immediati (questo perché tali successori immediati sono finiti, essendo l'albero a diramazione finita).

[35] Se fosse $\mathcal{A}_H \models P(t_1, \dots, t_n)$, allora avremmo $P(t_1, \dots, t_n) \in H$, il che non è.

Passo (ii). Facciamo vedere che, nelle ipotesi del lemma, la radice dell'albero è prolungabile. La dimostrazione avviene per assurdo, cioè ipotizziamo che esista un K che sia maggiore dell'insieme $\{|\gamma| \mid \gamma \in T\}$ e facciamo vedere che T sarebbe in tal caso finito. Il ragionamento è per induzione su tale K.

Se $K = 0$, T ha la sola radice ed è pertanto finito.

Se $K > 0$ e la radice ha per successori immediati i nodi $1, 2, \ldots, n$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva agli n alberi $T_i = \{\beta \mid i\beta \in T\}$ per $i = 1, \ldots, n$ (sono gli alberi che hanno come radice ciascuno un successore immediato della radice e, quindi, ad essi si applica l'ipotesi induttiva relativamente a $K - 1$): per ipotesi induttiva, tali alberi sono finiti e quindi T stesso è finito, perchè T ha solo un nodo in più della somma dei numeri dei nodi dei T_i.

Passo (iii). Sappiamo ora che la radice di T è prolungabile e che, come osservato sopra, un nodo prolungabile ha sempre un successore immediato che è a sua volta prolungabile. Possiamo allora definire induttivamente il ramo infinito $\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \ldots$ ponendo α_0 uguale alla radice e scegliendo α_{i+1} fra i nodi prolungabili successori immediati di α_i. $\dashv$

10 Appendice III: i calcoli hilbertiani

I calcoli hilbertiani sono stati impiegati in modo esclusivo nella letteratura della moderna logica simbolica almeno fino ai tempi di Gödel e sono a tutt'oggi molto utilizzati qualora si intenda privilegiare l'economicità di presentazione su altri aspetti, quali ad esempio la maneggevolezza e l'efficienza. Siccome è probabile che un lettore filosofo incontri i calcoli hilbertiani in altri corsi, diamo in questa appendice le informazioni essenziali.

Il calcolo hilbertiano manipola direttamente formule (non necessariamente enunciati). Una *dimostrazione* nel calcolo hilbertiano è una lista di formule

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

tale che ognuna delle formule A_i che vi compaiono è un assioma o è ottenuta da formule che la precedono nella lista come conseguenza dell'applicazione di una regola di inferenza. Una formula A è *dimostrabile* qualora compaia come ultimo elemento di una lista che sia una dimostrazione.

Assiomi e regole possono essere ad esempio così specificati (in ottemperanza al criterio di economicità facciamo una scelta minimale di connettivi e quantificatori utilizzando solo $\neg, \to$ e $\forall$). Gli assiomi sono

$$A \to (B \to A), \qquad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),$$
$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B), \qquad \forall x A \to A(t/x),$$
$$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B),$$

dove nel penultimo assioma si assume che il termine t sia sostituibile alla x in A (si veda la nota 17 del paragrafo 7) e nell'ultimo si assume che la x non occorra libera in A.
Le regole di inferenza sono due, la regola del *Modus Ponens*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

e la regola di *Generalizzazione*

$$\frac{A}{\forall x A}$$

Il calcolo hilbertiano è equivalente al calcolo da noi introdotto, in quanto anche per esso valgono i teoremi di validità e completezza:

Teorema. *Per ogni formula A, si ha che A è dimostrabile nel calcolo hilbertiano se e solo se A è una verità logica.*

11 Appendice IV: per fanatiche e fanatici...

Diamo qui di seguito una copiosa serie di esercizi, divisi in quattro gruppi. Lo studente/la studentessa potrà svolgere il quantitativo di esercizi che egli/ella reputa sufficiente ad ottenere un buon grado di dimestichezza con gli argomenti svolti.

ESERCIZI Formalizzare le seguenti frasi:

1 Alcuni siciliani non sono mori.

2 E' falso che la logica non sia interessante.

3 Marta non è una velina

4 Non si dà il caso che tutti i vertebrati siano mammiferi.

5 C'è sole, ma non fa caldo.

6 Un buon cittadino paga le tasse.

7 Tira vento e fa freddo, oppure piove.

8 Tutti gli studenti parlano o inglese o tedesco

9 O tutti gli studenti parlano inglese o tutti parlano tedesco.

10 Verrò alla festa, se qualcuno mi accompagna.

11 Verrò alla festa solo se qualcuno mi accompagna.

12 Avere pagato il biglietto è condizione necessaria ma non sufficiente affinché Paolo veda 'Caos calmo'.

13 Benchè Aldo e Bruno non abbiano votato, Mario ha votato.

14 Dante ama Beatrice.

15 Almeno un logico ricchissimo vive a Stanford.

16 Se non ci sono fate, allora ogni fata ha i capelli turchini.

17 Tutto ha una causa.

18 C'è una causa di tutto.

19 Tutti i bambini che hanno un cane lo amano.

20 Tutti i bambini hanno un cane e lo amano.

21 Chi desidera qualcosa, la ottiene.

22 Ognuno paga per qualcuno, nessuno paga per tutti.

Negli esercizi che seguono abbiamo usato l'abbreviazione $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ per indicare la singola formula $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \cdots \vee B_m)$. Se $n = 0$, l'abbreviazione $\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ sta per $B_1 \vee \cdots \vee B_m$ e, se $m = 0$, l'abbreviazione $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ sta per $\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.[36]

<u>*ESERCIZI*</u> Provare che le seguenti formule sono tutte logicamente valide:

1 $\forall x(P(x) \to Q(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \to S(x))$.

2 $\forall x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x)) \Rightarrow \forall x \exists y R(x,y)$.

3 $\exists y R(a,y), \forall x \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to S(y)) \Rightarrow \exists x(P(x) \to S(x))$.

4 $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to P(a) \Rightarrow (\exists x P(x) \to P(a)) \wedge (\exists x Q(x) \to P(a))$.

5 $\forall y(R(a,y) \to Q(y)), \forall x \exists y R(x,y), \forall x \forall y(R(x,y) \wedge Q(x) \to \neg Q(y)) \Rightarrow \exists x \neg Q(x)$.

6 $\forall x(P(x) \to Q(a)), \forall x(R(x) \to Q(a)) \Rightarrow \exists x(P(x) \vee R(x)) \to Q(a)$.

7 $\forall x(Q(x) \to \exists z P(z)) \Rightarrow \exists y(Q(y) \to P(y))$.

8 $\exists x(P(x) \wedge \forall y Q(y)) \Rightarrow \forall y \exists x(P(x) \wedge Q(y))$;

9 $\exists x P(x) \to \forall y \exists x R(x,y) \Rightarrow \forall y \forall x \exists z(P(x) \to R(z,y))$.

10 $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(y)), \forall z(Q(z) \to P(z) \vee P(f(z))) \Rightarrow \exists x P(x)$.

11 $\exists y P(y) \to \forall x(Q(x) \to S(x)) \Rightarrow \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee S(b)$.

12 $\forall x(P(x) \to \neg P(f(x))) \Rightarrow \exists x(P(x) \to Q(x))$.

13 $R(a,b,c), \forall x \forall y \forall z(R(x,y,z) \to R(y,y,z)), \forall x \forall y \forall z(R(x,y,z) \to R(x,y,y)) \Rightarrow \exists x R(x,x,x)$.

14 $\forall x(P(x) \vee \neg Q(x)), \exists y(P(y) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists x P(x)$.

15 $\forall x \forall y \forall z(D(x,y,z) \to D(x,x,y)), \exists y \exists z D(a,y,z) \Rightarrow D(a,a,a)$.

16 $\forall x \forall y(R(x,y) \to P(x) \vee P(y)) \Rightarrow \exists y(\exists x R(x,y) \to P(y))$

17 $\forall x P(x), \exists x(Q(x) \wedge P(x) \to S(x)) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge S(x)) \vee \exists x \neg Q(x)$

18 $\forall y(Q(y) \wedge \neg P(y) \to P(f(y))) \Rightarrow \exists x(\exists y Q(y) \to P(x))$.

---

[36] Chi ci legge si accorgerà che molto spesso, nel generare l'albero refutativo, risulta inutile ricopiare sempre lungo un ramo una formula che si vede subito che non verrà più utilizzata. Ciò è ovviamente lecito (a patto di avere intuito correttamente che la formula in questione non servirà) nell'ambito del tipo di esercizi esaminato in questo gruppo (non è così per gli esercizi del prossimo gruppo dove nessuna formula può essere 'persa per strada', perchè tutte le formule ancora attive contribuiscono alla costruzione di un modello). In effetti, la versione del calcolo che abbiamo presentato è un po' ridondante: si potrebbe non ricopiare mai niente e ripescare 'dal basso' del ramo le formule da analizzare ('asteriscando' quelle già analizzate e non da ricopiare); tuttavia ci sembra che il calcolo che abbiamo introdotto si presti meglio all'utilizzo didattico in un corso di primo livello.

ESERCIZI Provare che le seguenti formule non sono logicamente valide ed esibirne un contromodello:

1 $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

2 $\forall x(P(x) \to Q(x) \vee S(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x)) \vee \forall x(P(x) \to S(x))$.

3 $\forall x(R(x,x) \vee \exists y R(y,x)) \Rightarrow \forall x \exists y R(x,y)$.

4 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

5 $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to P(a) \Rightarrow \forall x(P(x) \to P(a)) \vee \forall x(Q(x) \to P(a))$.

6 $\exists x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$.

7 $\exists x P(x) \Rightarrow \exists y(P(y) \to \forall z Q(z))$.

8 $\forall x(P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge P(y))) \Rightarrow \neg P(a_0)$.

9 $\forall x(P(x) \vee Q(x) \to S(x)) \Rightarrow \forall z \exists x \exists y(P(x) \vee Q(y) \to P(z))$.

10 $\forall x(R(x,x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x \forall y(R(x,y) \to Q(x))$.

11 $\forall x R(x) \Rightarrow \forall x(\exists y P(y) \to Q(x))$.

12 $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \Rightarrow \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$

13 $\forall x R(x,x), \forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x)) \Rightarrow \exists x(R(a,x) \wedge R(x,b))$

14 $\Rightarrow \forall z(\forall x D(x,x,z) \to \forall y D(z,y,y))$

15 $\exists y \forall x R(x,y) \Rightarrow \forall x \forall y(R(x,y) \vee R(y,x))$.

ESERCIZI Studiare le seguenti inferenze: formalizzarle e, per ciascuna di esse, determinare se è corretta o meno.

1

Qualche impiegato statale è ricco
Ogni postino è un impiegato statale

Se Ernesto è un impiegato statale e non è ricco allora non è un postino

2

Ogni pinguino è un uccello
Qualche uccello vola
Pingu è un uccello ma non vola

Pingu non è un uccello

3

Se Alfio canta allora Alfio è realizzato.
Chi è realizzato non fuma.

Se Alfio canta allora Alfio non fuma.

4

Qualche astronauta è nell'astronave
Tutti gli astronauti che sono nell'astronave stanno facendo esperimenti
Bob è un astronauta

Se Bob non è nell'astronave, allora non sta facendo esperimenti

5

Chi vota va nella cabina 1 o va nella cabina 2.
Umberto vota e Umberto non va nella cabina 1.

Umberto va nella cabina 2.

6

Tutte le veline sono sexy.
Qualche velina è studente universitario.

Qualche studente universitario è sexy.